

**ETS de ARQUITECTURA de MADRID,  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**

## ***ESTRUCTURAS I: EJERCICIOS SOBRE ESTRUTRUAS TRIANGULADAS***

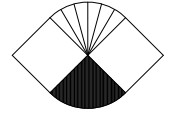


**Planteamiento: JOAQUÍN ANTUÑA BERNARDO, JOSÉ L. FERNÁNDEZ CABO, ALMUDENA MAJANO MAJANO.  
Desarrollo: RUBÉN CONDE GÓMEZ, MARÍA LUCÍA CERMEÑO, JOSÉ L. FERNÁNDEZ CABO, JOAQUÍN ANTUÑA BERNARDO, ALMUDENA MAJANO MAJANO.**

**MADRID, octubre 2014 (v1)**



Licencia Creative Commons tipo:  
**Reconocimiento - NoComercial - SinObraDerivada (by-nc-nd)**



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

### CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Tema: TRIANGULADAS

© José L. Fernández Cabo

Práctica 7 y 8

#### OBJETIVO

El objetivo fundamental de estas dos prácticas es:

- (**Práctica 7: RESISTENCIA**) analizar los esfuerzos de dos tipos de estructuras trianguladas y dimensionar las barras para resistir tanto los esfuerzos de tracción como los de compresión. Al dimensionar a compresión el alumno se enfrenta por primera vez a un problema de estabilidad considerando un modelo de sólido deformable.
- (**Práctica 8: RIGIDEZ**) calcular los movimientos de la estructura en varios puntos, mediante el teorema de los trabajos virtuales, y comparar esos valores con el criterio de rigidez establecido (normalmente por la normativa).

Como siempre, hay además dos objetivos adicionales importantes: mostrar ejemplos del paso de la realidad al modelo de análisis, y trabajar sobre tipos estructurales muy recurrentes en la práctica profesional, cuyo funcionamiento estructural el alumno debe interiorizar.

#### PLANTEAMIENTO GENERAL

Se trabajará sobre dos estructuras que están a su vez asociadas a dos grandes grupos de soluciones, como ahora se explicará. Hay que recalcar no obstante que entre ambos casos extremos existe una amplia gama de matices de gran interés.

#### CASO 1. CERCAS DE CORDONES PARALELOS; considerando además acciones de peso propio

La cerca de cordones en paralelo (Fig. 1), la mayoría de las veces biapoyadas. Se construyen muy a menudo, la mayoría en acero con luces de entre 20 y 50m por lo general, aunque pueden llegar hasta el entorno de los 100m (cada vez con rendimientos sensiblemente peores). La clave de su diseño es una triangulación con ángulos con la horizontal de entre 45 y 60 grados, y unas relaciones luz-canto, es decir, de esbeltez, de entre 12 y 15.

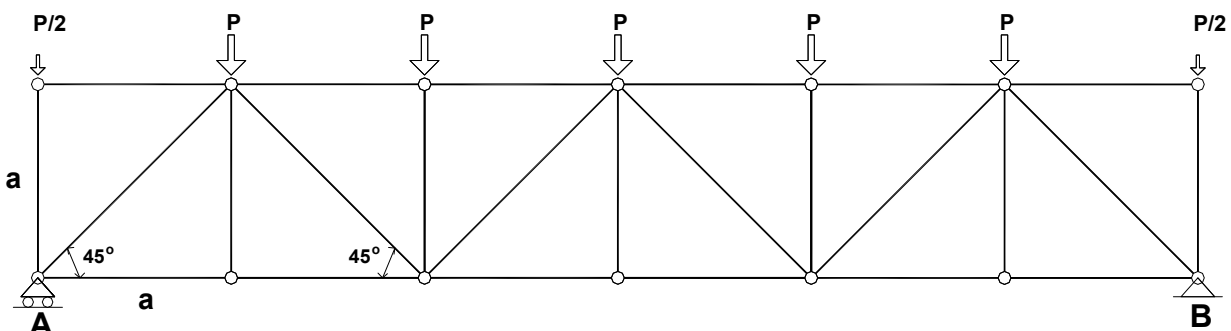
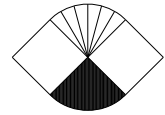


Fig. 1



POLITÉCNICA



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

En madera es también un tipo frecuente, aunque aquí el arco suele ser más favorable. Las luces en este caso son algo más reducidas que en acero, pero no mucho más.

En hormigón son más escasas por el elevado peso propio de la solución, pero también tienen su hueco, aunque ahora muy ligado al pretensado de algunos de los elementos traccionados. Las luces depende mucho del uso del pretensado, pero en principio son inferiores a las del acero.

Por otra parte, cuando las acciones son de peso propio, y con ello paralelas, y además la sustentación general reacciones también verticales, el análisis se simplifica notablemente, y compensa hacerlo a través de los diagramas de cortantes y flectores de la viga biapoyada que se formaría uniendo los dos apoyos.

El motivo principal de que los cordones sean paralelos, es decir, de no modificar el canto, es la simplicidad constructiva. De ahí que además lo lógico es que exista una modulación en las trazas de modo que se consiga una repetición en la solución y detalle de gran número de las uniones.

Analizando este caso podremos entender mejor casos constructivos que se estudiarán en clase y que se muestran a continuación.

- Edificio de la ETS de Industriales de la Universidad Carlos III de Madrid (**Fig. 2 y Fig. 3**). Obra de los arquitectos Gerardo Salvador Molezún y José Ramón Menéndez Luarca; y de Ricardo Aroca como consultor de estructuras. La crujía de 15m se deja totalmente libre de soportes con cerchas de 1m de canto y un trazado de diagonales a 45 grados con montantes intercalados para reducir la flexión local de los cordones superiores). El forjado, de chapa plegada y hormigón, con una luz de 2,5m, está conectad a la cercha formando una viga mixta, lo que permite llegar a una esbeltez de 15 y que el dimensionado sea por resistencia y no por rigidez.

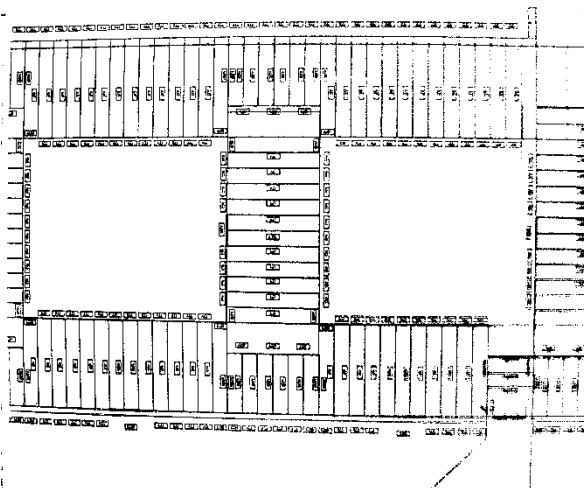


Fig. 2

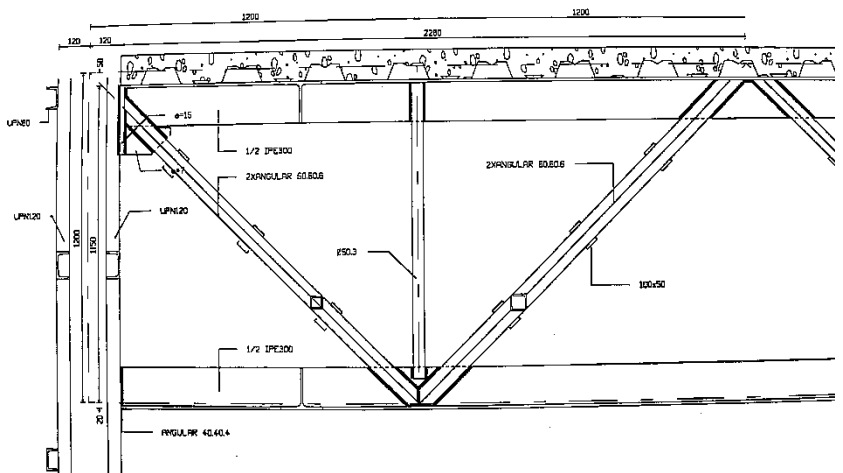
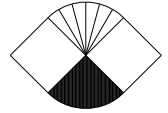


Fig. 3



POLITÉCNICA



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

- Estación Príncipe Pío de Madrid (**Fig. 4 y Fig. 5**) (**meter autores**): cercha de cordones paralelos construida con perfiles circulares de acero para el paso del metro, con un doble trazado de diagonales a 45 grados, y correas y pares de la cubierta original. Son soluciones de dos épocas distintas y dos tamaños distintos, pero la comparación es muy ilustrativa.



Fig. 4



Fig. 5

- Pabellón de Cristal, Casa de Campo, Madrid (**Fig. 6**). proyectado y construido por los arquitectos Francisco de Asís Cabrero, Luis Labiano y Jaime Ruiz, y los ingenieros Rafael de Heredia Scasso y Anselmo Moreno Castillo entre 1964 y 1965. En cubierta y forjado de planta baja aparecen cerchas de cordones en paralelo. El alumno notará que las de cubierta no están estrictamente en paralelo. No obstante, se incluye en ese tipo porque la pendiente es baja y motivada para conseguir la evacuación de las aguas (tiene una luz de algo más de 70m). Cuando se quiera un trazado en arco se notará de manera mucho más manifiesta.

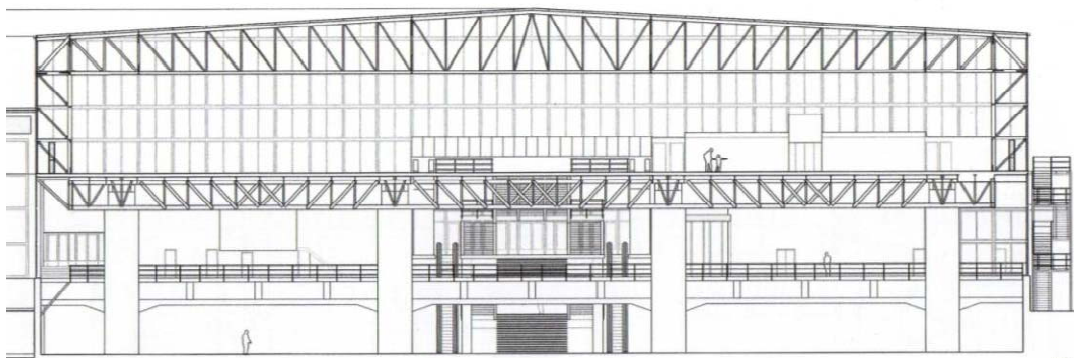
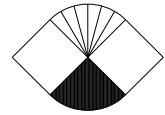


Fig. 6





POLITÉCNICA



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

- Edificio Media-Tic, Barcelona (**Fig. 7** y **Fig. 8**). Obra del arquitecto Enric Ruiz Geli y de la consultora de estructuras BOMA. Cercha de cordones en paralelo, que coge toda la última planta, y de la que cuelgan las inferiores. Diseño de elementos con unión de chapones en cajón, una solución muy eficaz. Triangulación con montantes y diagonales a 45 grados (nótese que se elimina la triangulación de tramo central). Los dos pilares son a su vez cerchas, de modo que el conjunto es en realidad un pórtico cuyos pilares y viga son cerchas.

La cercha, además de su habitual uso en luces medias, se construye también muy habitualmente para, también en luces medias, formar una superestructura que recoja la carga de varias plantas, como es este caso. La planta baja queda con ello totalmente liberada de soportes, salvo en el perímetro, y al mismo tiempo los tirantes que aparecen en el resto de las plantas tienen un grueso pequeño, aunque su necesaria protección frente a incendio haga que el aspecto final no sea tan distinto al de un soporte a compresión.



Fig. 7



Fig. 8

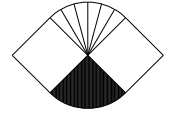
### CASO 2. CERCHAS DE CORDONES NO PARALELOS, O DE CANTO VARIABLE, considerando además acciones con cualquier dirección (caso general)

La reglas de diseño de estas cerchas (**Fig. 9**) son idénticas a las anteriores en lo relativo a disposición de la triangulación y relación luz-canto (esbeltez). Y lo mismo en cuanto a materiales y luces.

La idea básica de su diseño, desde el punto de vista estructural, es simple: uno no de los cordones tiene un trazado funicular o cercano al funicular; y el otro, recto, sirve se lleva el empuje. Esto hace que los



POLITÉCNICA



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

esfuerzos en las diagonales sean mucho más bajos que en el caso anterior, incluso nulos en ciertas hipótesis de carga. No obstante, muchos diseños tienen un origen constructivo, como luego se verá.

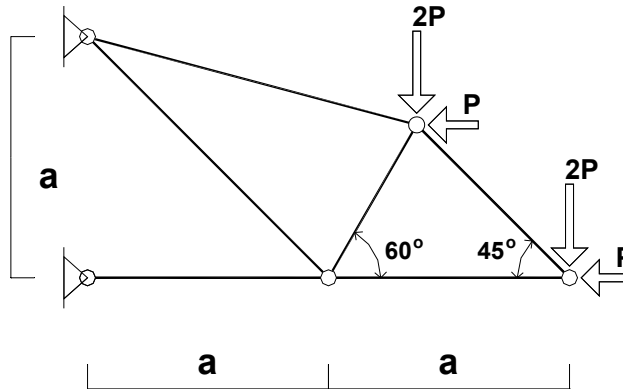


Fig. 9

No obstante, su mayor complejidad constructiva hace que sólo se recurra a ellas (desde el punto de vista técnico) en tamaños grandes o para conseguir una pendiente y con ellas la evacuación de las aguas.

Analizando este caso podremos entender mejor casos constructivos que se estudiarán en clase y que se muestran a continuación.

- Cubierta del primer aserradero de Valsaín, Segovia. Construido en 1.894 por Patrimonio Real. Transformado en 1.952. Nave central con unas cercas de 15,3m entre apoyos y un canto central de aprox. 3,5m; que están separadas aprox. 4m. Se trata de una solución de cercha de origen romano, que nace precisamente asociada a la estructura de madera. Se puede entender en realidad como un conjunto de arcos formados por pares y tirante. La razón del ser del trazado con cordones no paralelos, en estos casos, es constructiva, se resuelve la cubierta a dos aguas, lo que no es poca cosa.



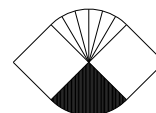
Fig. 10



Fig. 11



POLITÉCNICA



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

- Talleres aeronáuticos TABSA (1957) (**Fig. 12**) y Gimnasio Maravillas (1961) (**Fig. 13**); obras del arquitecto Alejandro de la Sota y del ingeniero Eusebio Rojas Marcos, que trabajó habitualmente con Sota. Sota es sin duda uno de los arquitectos más relevantes de su época. Su obra además tuvo mucho impacto en la siguiente generación.

Las dos obras tienen un enorme interés, y además se puede ver que la colocación del cordón con trazado funicular se puede invertir, colocándolo en la parte superior o en la inferior, sin alterar en nada la solución y su razón de ser.

En el caso de TABSA, donde las concargas suponen la mayor parte de la carga, y el trazado del cordón de compresión es totalmente funicular, las diagonales sustituirse por soluciones como las de nudo rígido, menos eficaces pero suficientes. Las cerchas de TABSA tienen una luz de 24m con un canto máximo de 5,3m, con una separación entre cerchas de 8m. El



Fig. 12



Fig. 13

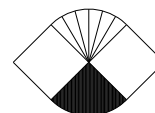
Las cerchas del Gimnasio Maravillas tienen una luz de 20m y un canto de 2,3m. Las cargas de uso son aquí importantes, y por ello un trazado funicular exacto del cordón inferior no hubiera evitado el empleo de diagonales.

- Estación Príncipe Pío de Madrid (y) (**meter autores**). Cercha tipo Polonceau, una solución muy extendida entre finales del XIX y comienzos del XX. La solución nace en primer lugar de una adaptación a la cubierta a dos aguas, como en el caso de la de madera antes mostrada. No obstante, el uso del acero permite que los elementos traccionados sea mucho más livianos visualmente, y además permitan un cambio de trazado con mucha más facilidad constructiva. El par se une rígidamente al soporte para formar un pórtico, una solución muy adecuada y frecuente.





POLITÉCNICA



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

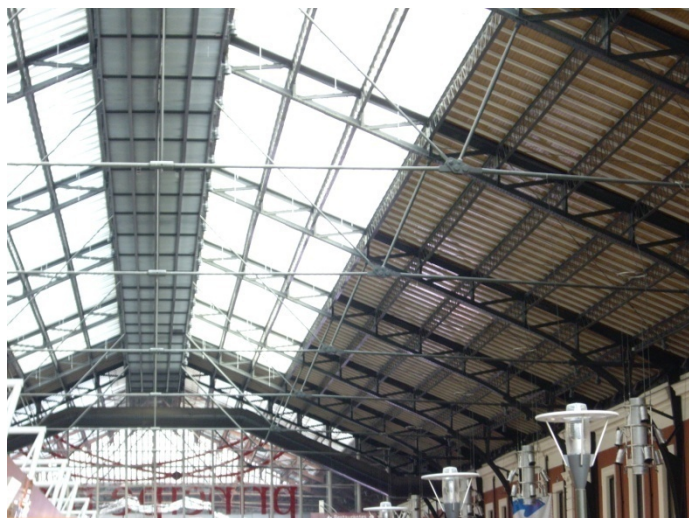


Fig. 14



Fig. 15

Hay que recalcar que la bondad de esta solución depende básicamente de que el trazado del cordón que marca el canto variable sea funicular; y a su vez de que hay un funicular preponderante entre los diferentes posibles para distintas hipótesis de carga. Es por ello que las soluciones a dos aguas no son óptimas. No obstante, son más que razonables para luces de orden de los 20 a 40m.

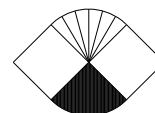
### • COMENTARIOS SOBRE EL MODELO DE BARRAS ARTICULADAS

Después mostrar todas estas estructuras construidas, y recordar que el análisis de las trianguladas se hará bajo la hipótesis de que las barras están articuladas en sus nudos, surge la cuestión de por qué, en la mayoría de los casos, la articulación no se formaliza, y a pesar de ello dicha hipótesis es razonable en la mayoría de los casos.

Como se explicará en clase más detenidamente, la validez del modelo está relacionada con la rigidez del esquema, triangulad; de modo que aunque la unión sea capaz de resistir un momento, no hay apenas rotaciones entre las barras que generen su aparición. Esta cuestión se aprovecha muchas veces al construir un modelo, de modo que no se incluyen en el mismo los aspectos que no van a aparecer (o se espera que aparezcan).

No obstante, para las grandes cerchas, los momentos flectores secundarios que van a aparecer no pueden despreciarse. Pero la buena noticia es que su análisis es muy sencillo, basta realizar una análisis incluyendo la rigidez a flexión de las barras, cosa que aunque no pertenece a la materia de este curso ya se verá en Estructuras II.



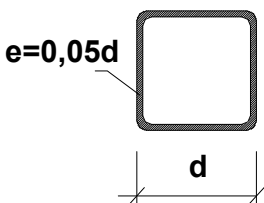
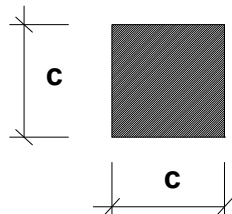


## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

### CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Tema: TRIANGULADAS: RESISTENCIA			Práctica 7
APELLIDOS:	NOMBRE:	Nº Expte.	— Z Y X

#### DATOS GENERALES para AMBAS PRÁCTICAS

<p><b>Acero:</b></p> <p>Módulo de Young <math>E = 200 \text{ kN/mm}^2</math>. Tensión en el límite elástico: <math>\sigma_e = 255 \text{ N/mm}^2</math>. Tensión normal segura <math>f_{\sigma, \text{acero}} = 170 \text{ N/mm}^2</math>. Tensión tangencial segura <math>f_{\tau, \text{acero}} = 100 \text{ N/mm}^2</math></p>  <p><b>Secc. acero</b> Area, <math>A = 0,2 \cdot d^2</math> Radio de giro, <math>i \approx 0,41 \cdot d</math></p>	<p><b>Madera:</b></p> <p>Módulo de Young <math>E = 10 \text{ kN/mm}^2</math>. Tensión normal segura <math>f_{\sigma, \text{madera}} = 8 \text{ N/mm}^2</math>. Tensión tangencial segura <math>f_{\tau, \text{madera}} = 1,2 \text{ N/mm}^2</math></p>  <p><b>Secc. madera</b> Area, <math>A = c^2</math> Radio de giro, <math>i \approx 0,29 \cdot c</math></p>
---	--

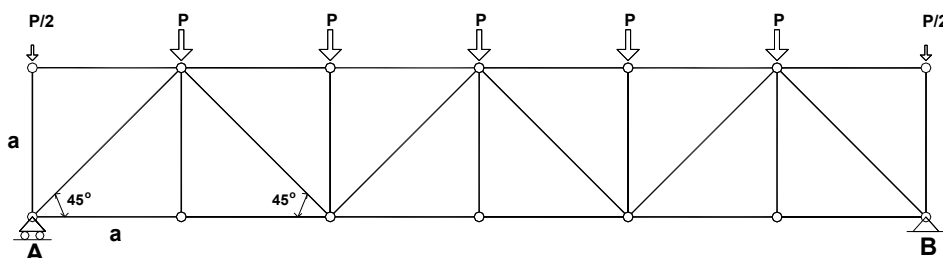
Se supondrá que existe un **arriostramiento lateral** de tal modo que, en las barras comprimidas, **la longitud de pandeo puede considerarse la longitud de la barra**. El factor de pandeo puede obtenerse de la HOJA DE DATOS ESTRUCTURALES (véase la web de la asignatura); o bien se pueden usar las siguientes expresiones aproximadas y muy sencillas de recordar:

Para **ACERO**, y si  $\lambda \leq 150$ ;  $\omega \cong 1 + \left(\frac{\lambda}{90}\right)^3$

Para **MADERA**, y si  $\lambda \leq 100$ ;  $\omega \cong 1 + \left(\frac{\lambda}{70}\right)^3$

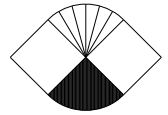
siendo  $\lambda$  la esbeltez mecánica (relación entre la longitud de pandeo equivalente y el radio de giro).

**CASO 1.** Datos: carga superficial  $q = 4 \text{ kN/m}^2$ ; separación entre cerchas,  $s = 6\text{m}$ ;  $a = 6\text{m}$   $P = q \cdot a \cdot s = 144 \text{ kN}$ ; luz  $L = 6 \cdot a = 36\text{m}$ . **Dimensionado en ACERO.**





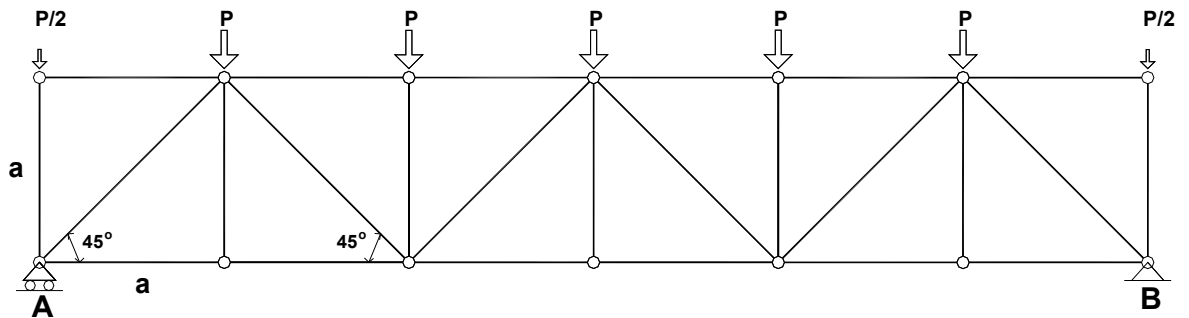
POLITÉCNICA



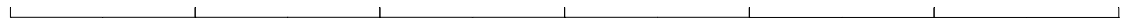
## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

### CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

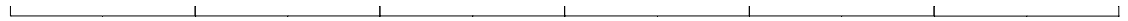
**Fig. 16** Dado que acciones y reacciones son verticales, lo más sencillo para analizar esta estructura es comenzar calculando y dibujando los diagramas de cortantes y flectores de la viga biapoyada de referencia.



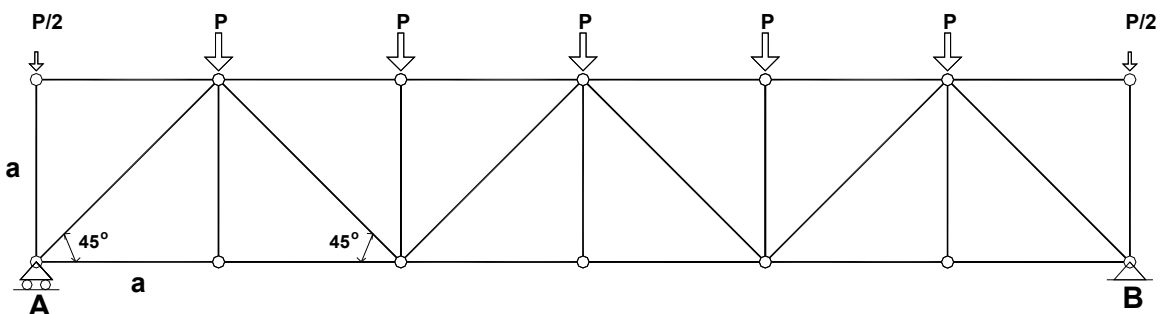
CORTANTE

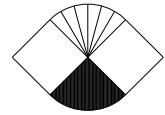


FLECTOR



A partir de aquí se **calcularán todos los esfuerzos**, por el método de los cortes, y se **anotará su valor**, al lado de cada barra, en la siguiente figura. Además se **coloreará** (de forma bien clara) con **rojo las barras traccionadas** y con **azul las comprimidas**.





## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

### CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Después se van a **dimensionar** varias barras, agrupándolas con criterios constructivos, y **usando ACERO**.

- PARA EL GRUPO DE LAS **TRACCIONADAS** (nótese que no hay montantes traccionados):

Axil máximo del cordón traccioando	$+N_{\text{cordon, max}} =$	(kN)
Lado <b>d</b> del perfil usando un cuadrado hueco de acero	$d_{\text{cordon}} =$	(mm)

Axil máximo la diagonal traccioanda	$+N_{\text{diagonal, max}} =$	(kN)
Lado <b>d</b> del perfil usando un cuadrado hueco de acero	$d_{\text{diagonal}} =$	(mm)

- PARA EL GRUPO DE LAS **COMPRIMIDAS**:

Axil máximo del cordón comprimido	$-N_{\text{cordon, max}} =$	(kN)
Longitud de pandeo	$L_{\text{pandeo}} =$	(m)
Lado <b>d</b> del perfil usando un cuadrado hueco de acero	$d_{\text{cordon}} =$	(mm)

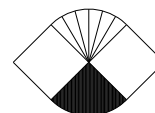
Axil máximo la diagonal comprimida	$-N_{\text{diagonal, max}} =$	(kN)
Longitud de pandeo	$L_{\text{pandeo}} =$	(m)
Lado <b>d</b> del perfil usando un cuadrado hueco de acero	$d_{\text{diagonal}} =$	(mm)

Axil máximo del montante comprimido	$-N_{\text{montante, max}} =$	(kN)
Longitud de pandeo	$L_{\text{pandeo}} =$	(m)
Lado <b>d</b> del perfil usando un cuadrado hueco de acero	$d_{\text{montante}} =$	(mm)





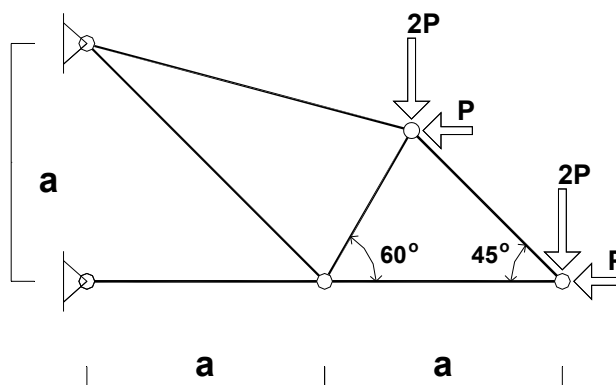
POLITÉCNICA



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

### CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

**CASO 2.** Datos:  $P=144$  kN;  $a=6$ m; luz  $L=2 \cdot a=12$ m. Dimensionado en **MADERA**.



Dado que acciones y reacciones no son verticales, no podemos apoyarnos en los diagramas de esfuerzos cortantes y flectores. Este es el caso general. El problema se puede resolver gráficamente o analíticamente, dando cortes sucesivos y estableciendo el equilibrio en cada corte.

calcularán todos los esfuerzos, tanto analíticamente como gráficamente, y se anotará su valor, al lado de cada barra, en la figura anterior. Además se **coloreará** (de forma bien clara) con **rojo las barras traccionadas** y con **azul las comprimidas**.

Después se van a **dimensionar** varias barras, agrupándolas con criterios constructivos, y **usando MADERA**.

- PARA EL GRUPO DE LAS **TRACCIONADAS**:

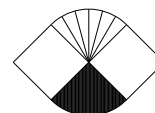
Axil máximo del cordón traccioando	$+N_{\text{cordon, max}} =$	(kN)
Lado <b>c</b> de la escuadría de madera	$C_{\text{cordon}} =$	(mm)

Axil máximo la diagonal traccioanda	$+N_{\text{diagonal, max}} =$	(kN)
Lado <b>c</b> de la escuadría de madera	$C_{\text{diagonal}} =$	(mm)

- PARA EL GRUPO DE LAS **COMPRIMIDAS**:

Axil máximo del cordón comprimido	$-N_{\text{cordon, max}} =$	(kN)
Longitud de pandeo	$L_{\text{pandeo}} =$	(m)
Lado <b>c</b> de la escuadría de madera	$C_{\text{cordon}} =$	(mm)

Axil máximo la diagonal comprimida	$-N_{\text{diagonal, max}} =$	(kN)
Longitud de pandeo	$L_{\text{pandeo}} =$	(m)
Lado <b>c</b> de la escuadría de madera	$C_{\text{diagonal}} =$	(mm)

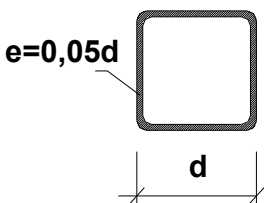
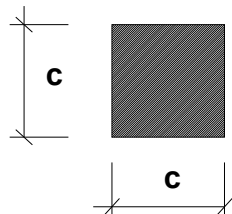


# ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

## CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Tema: TRIANGULADAS: RIGIDEZ			Práctica 8
APELLIDOS:	NOMBRE:	Nº Expte.	— $\bar{z}$ $\bar{y}$ $\bar{x}$

### DATOS GENERALES para AMBAS PRÁCTICAS

<p><b>Acero:</b></p> <p>Módulo de Young <math>E = 200 \text{ kN/mm}^2</math>. Tensión en el límite elástico: <math>\sigma_e = 255 \text{ N/mm}^2</math>. Tensión normal segura <math>f_{\sigma, \text{acero}} = 170 \text{ N/mm}^2</math>. Tensión tangencial segura <math>f_{\tau, \text{acero}} = 100 \text{ N/mm}^2</math></p>  <p><b>Secc. acero</b> Area, <math>A = 0,2 \cdot d^2</math> Radio de giro, <math>i \approx 0,41 \cdot d</math></p>	<p><b>Madera:</b></p> <p>Módulo de Young <math>E = 10 \text{ kN/mm}^2</math>. Tensión normal segura <math>f_{\sigma, \text{madera}} = 8 \text{ N/mm}^2</math>. Tensión tangencial segura <math>f_{\tau, \text{madera}} = 1,2 \text{ N/mm}^2</math></p>  <p><b>Secc. madera</b> Area, <math>A = c^2</math> Radio de giro, <math>i \approx 0,29 \cdot c</math></p>
---	--

Se supondrá que existe un **arriostramiento lateral** de tal modo que, en las barras comprimidas, la **longitud de pandeo puede considerarse la longitud de la barra**.

### CASO 1. Cercha de cordones en paralelo de ACERO. Predicción de la rigidez.

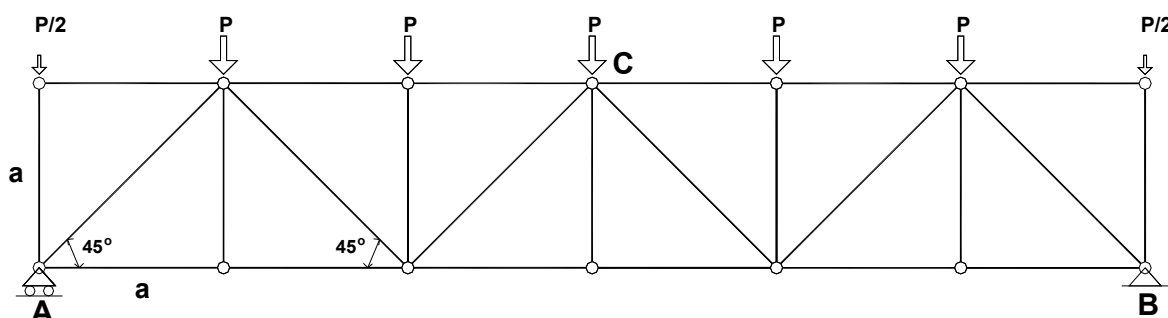
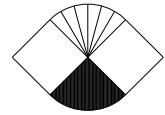


Fig. 17

En este caso la comprobación de rigidez se va a realizar **partiendo de un criterio de dimensionado razonable y establecido a posteriori**. Con ello en realidad **no necesitamos el dimensionado hecho en la práctica anterior**. Es necesario entender este modo de ver el problema pues muestra la naturaleza del problema.

Para ello basta fijar el valor de tensión normal de todas las barras traccionadas igual a la segura,

$$\sigma_{\text{traccion}} = \sigma(+) = f_{\sigma, \text{acero}} = 170 \text{ N/mm}^2;$$



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

### CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

y de manera similar con las comprimidas, pero teniendo en cuenta el pandeo, y para ello asumiendo un factor de pandeo  $\omega$  a priori, por ejemplo de  $\omega=1,4$ ; es decir,

$$\sigma_{\text{compresión}} = \sigma(-) = f_{\sigma, \text{acero}} / \omega = 170 / 2 = 85 \text{ N/mm}^2.$$

Con ello se pueden a su vez calcular las deformaciones unitarias de cada barra según sea de compresión o de tracción,  $\varepsilon(-)$  ó  $\varepsilon(+)$  respectivamente, es decir:

$$\varepsilon(-) = \sigma(-) / E \quad ; \quad \varepsilon(+) = \sigma(+)/E$$

A partir de aquí se puede aplicar el teorema de los trabajos virtuales y CALCULAR:

<b>Movimiento vertical en C</b> (descenso lógicamente)	$\delta_{C,v} =$ (mm)
<b>Movimiento horizontal en A</b> ; indicando signo positivo si es hacia la derecha y negativo en caso contrario	$\delta_{C,h} =$ (mm)

Resta sólo comparar esos valores con los límites que se establezcan. Lo haremos sólo para el movimiento vertical, donde este tipo de estructuras están generalmente asociadas a límites de rigidez relativos del entorno de  $\delta / L \leq 1/500$  para tramos biapoyados o equivalentes, y el doble,  $\delta / L \leq 1/250$ , para voladizos; siendo  $\delta$  el desplazamiento máximo en el tramo de referencia y  $L$  su luz. En este caso aplicaremos por tanto el primero.

<b>¿Cumple el requisito de rigidez respecto al movimiento vertical en C ?</b>	$\delta_{C,v} / L =$
---	----------------------

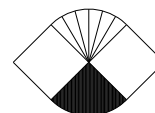
Haremos no obstante una pregunta adicional con interés conceptual.

<b>Movimiento vertical en C debido exclusivamente</b> a las dos barras más solicitadas del cordón de tracción	$\delta'_{C,v} =$ (mm)
---	------------------------





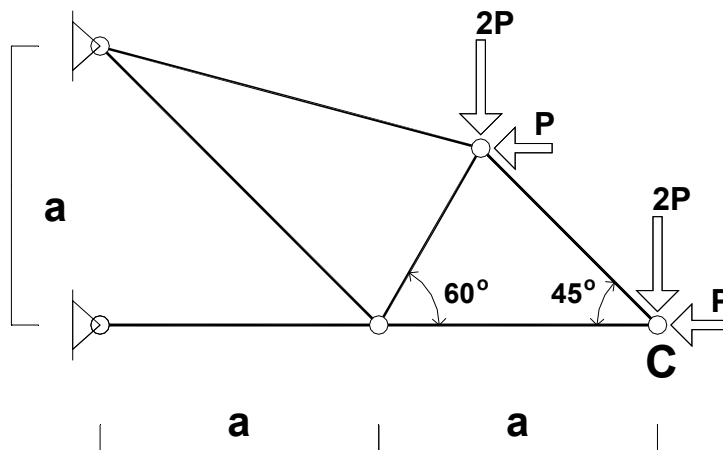
POLITÉCNICA



## ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

### CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

**CASO 2.** Cercha de canto variable en **MADERA**. En este caso se partirá del dimensionado hecho en la práctica anterior con los siguientes datos:  $P=144$  kN;  $a=6$ m; luz  $L=2 \cdot a=12$ m.



Con ello se puede calcular, ahora ya sin asumir nada a priori (pero teniendo que haber dimensionado toda la estructura) el valor de las deformaciones unitarias de cada una de las barras comprimidas y traccionadas.

A partir de aquí se puede aplicar el teorema de los trabajos virtuales y CALCULAR:

<b>Movimiento vertical en C</b> (descenso lógicamente)	$\delta_{C,v} =$ (mm)
<b>Movimiento horizontal en A;</b> indicando signo positivo si es hacia la derecha y negativo en caso contrario	$\delta_{C,h} =$ (mm)

Resta sólo comparar esos valores con los límites que se establezcan. Lo haremos también sólo para el vertical, pero al ser un voladizo usamos el límite de  $\delta/L \leq 1/250$ , para voladizos.

<b>¿Cumple el requisito de rigidez respecto al movimiento vertical en C ?</b>	$\delta_{C,v}/L =$
---	--------------------

Y haremos también una pregunta adicional con interés conceptual.

<b>Movimiento vertical en C debido exclusivamente</b> a todo el cordón inferior (horizontal)	$\delta'_{C,v} =$ (mm)
--	------------------------

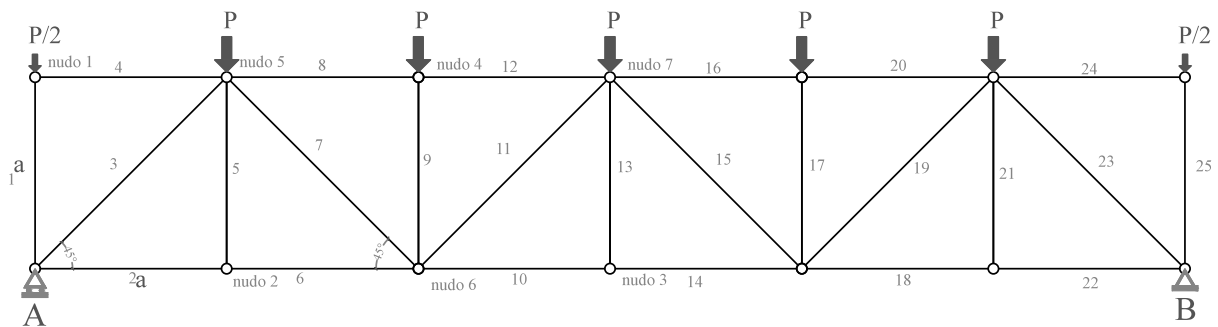
## PRÁCTICA 07: TRIANGULADAS

El objetivo fundamental de estas dos prácticas es analizar los esfuerzos de una estructura triangulada y dimensionar las barras para resistir tanto los esfuerzos de tracción como los de compresión.

En este caso, la estructura triangulada es una cercha de cordones paralelos biapoyada. Este tipo de cerchas se contruye muy a menudo, la mayoría en acero con luces de entre 20 y 50m por lo general, aunque pueden llegar hasta el entorno de los 100m. La clave de su diseño es una triangulación con ángulos con la horizontal de entre 45 y 60 grados, y unas relaciones de luz-canto, es decir, esbeltez, de entre 12 y 15.

En este caso los datos de la cercha son;

$$P=144 \text{ kN} \quad a= 6 \text{ m} \quad \text{ángulo}= 45^\circ$$



De la disposición de las barras y las cargas, se puede simplificar el problema, determinando las barras que tienen esfuerzo nulo. Para ello se planteará el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales, en función del nudo. De este proceso también se observa por equilibrio de nudo la igualdad de esfuerzos en algunas barras:

nudo 1

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_4 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 = \frac{P}{2} \rightarrow N_1 = 72 \text{ kN} \text{ (Compresión(-))}$$

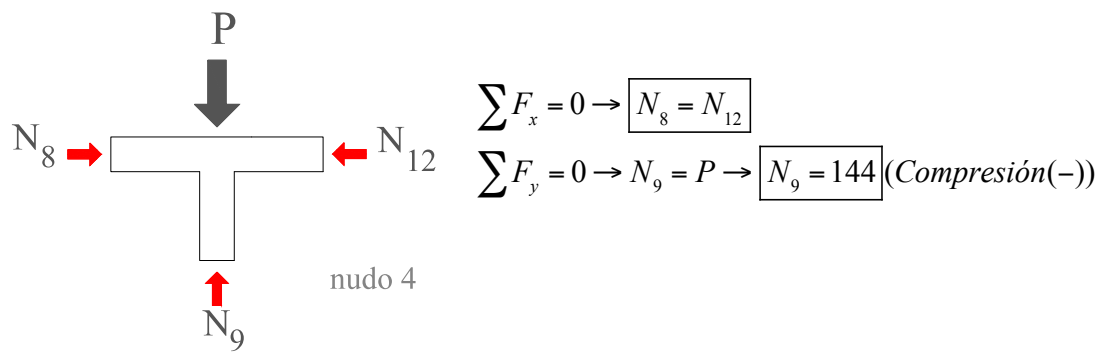
nudo 2

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_2 = N_6$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_5 = 0 \text{ kN}$$

Esto mismo pasa en el nudo 3:  $N_{10} = N_{14}$   $N_{13} = 0 \text{ kN}$

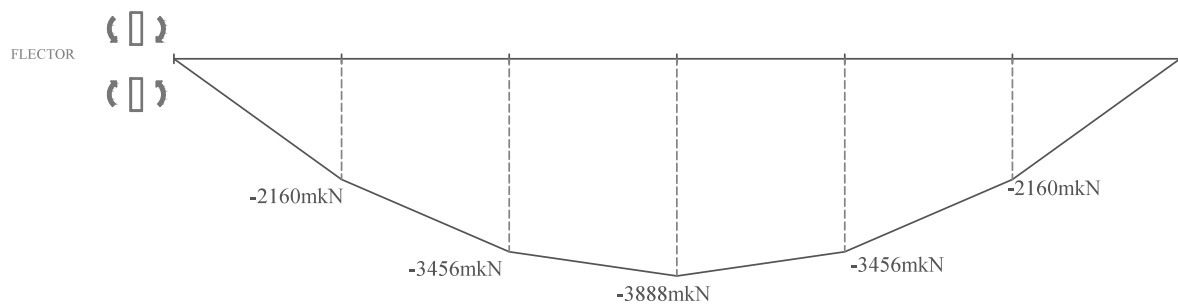
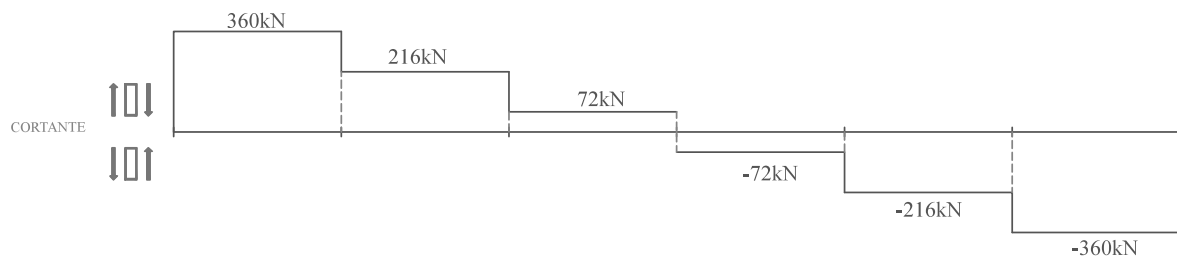
Para obtener el esfuerzo de las barras restantes se empleará el Equilibrio de Nudos.



Una vez identificadas las barras de esfuerzo nulo, y observando la disposición de la cercha, se observa su simetría. Por lo que reducimos el número de barras a calcular:

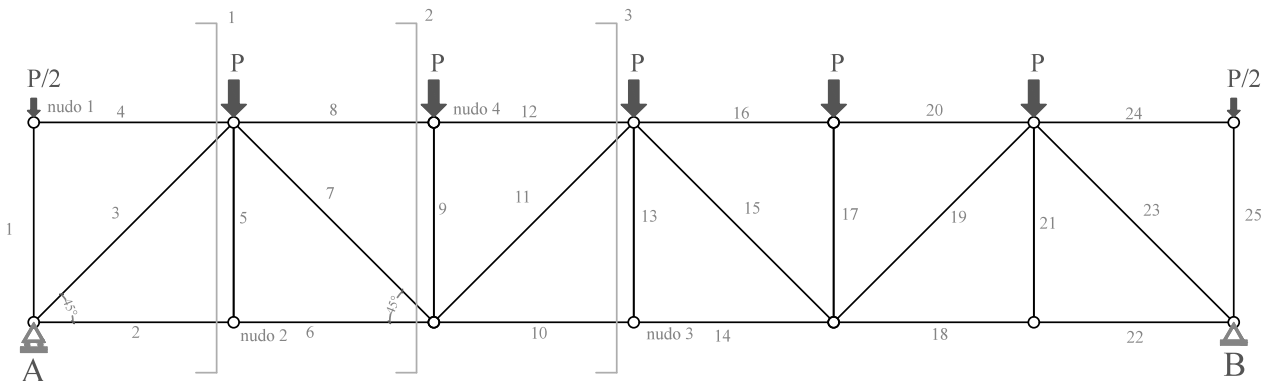
$$\begin{aligned} N_1 &= N_{25} & N_7 &= N_{19} \\ N_2 &= N_{22} & N_8 &= N_{20} \\ N_3 &= N_{23} & N_9 &= N_{17} \\ N_4 &= N_{24} & N_{10} &= N_{14} \\ N_5 &= N_{21} & N_{11} &= N_{15} \\ N_6 &= N_{18} & N_{12} &= N_{16} \end{aligned}$$

Dibujaremos los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores.





A partir de aquí se calcularán todos los esfuerzos por el método de los cortes.

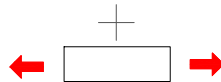


Los esfuerzos interiores  $V$  y  $M$  son las resultantes de los esfuerzos en las barras. Suponemos que su sentido es el que se indica en la figura y planteamos la igualdad entre los esfuerzos de las barras y los esfuerzos interiores. Se utilizará el siguiente convenio:

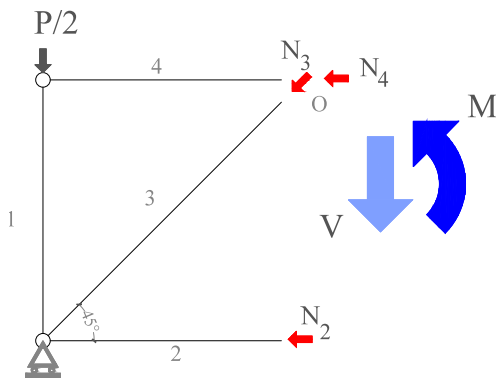
(-)Compresión



(+)Tracción



### CORTE 1



$$V = 360kN$$

$$M = 2160kN \cdot m$$

La única barra con componente vertical es la 3, por lo que se calcula directamente al igualar el cortante a dicha componente vertical.

$$N_3 \cdot \sin 45 = V \rightarrow$$

$$N_3 = 509kN \text{ (Compresión(-))}$$

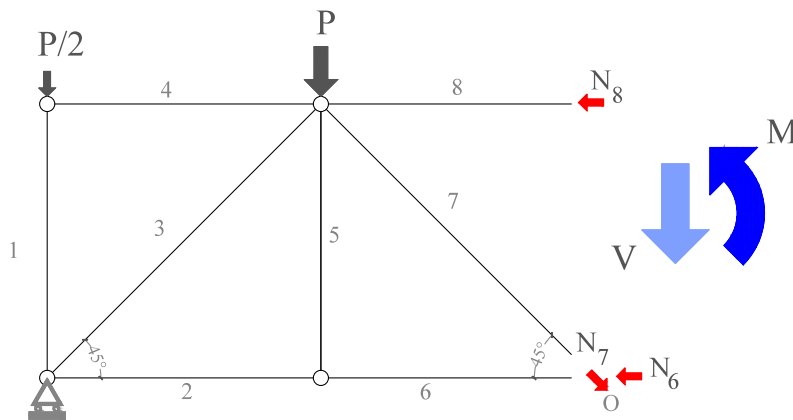
Para el cálculo del esfuerzo de la barra 2 se toman momentos respecto del punto de referencia O y se iguala, ya que así sería la única barra que daría momento:

$$N_2 + M = 0 \rightarrow$$

$$N_2 = -360kN \text{ (Tracción(+))}$$

Al salir con signo negativo quiere decir que va en dirección contraria a la dibujada.

### CORTE 2



$$V = 216kN$$

$$M = 3456kN \cdot m$$

$$N_7 \cdot \sin 45 = V \rightarrow$$

$$N_7 = 305kN \text{ (Tracción(+))}$$

$$N_8 \cdot a = M \rightarrow$$

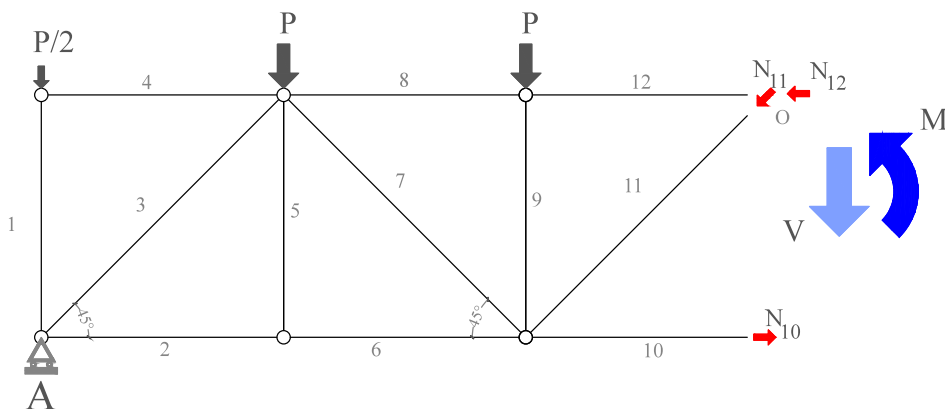
$$N_8 = 576kN \text{ (Compresión(-))}$$

En este caso, para hallar el esfuerzo de la barra 6 se hace el equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_8 + N_6 - N_7 \cdot \cos 45 = 0 \rightarrow$$

$$N_6 = 360kN \text{ (Tracción(+))}$$

### CORTE 3



$$V = 72 \text{ kN}$$

$$M = 3888 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$N_{11} \cdot \sin 45 = V \rightarrow$$

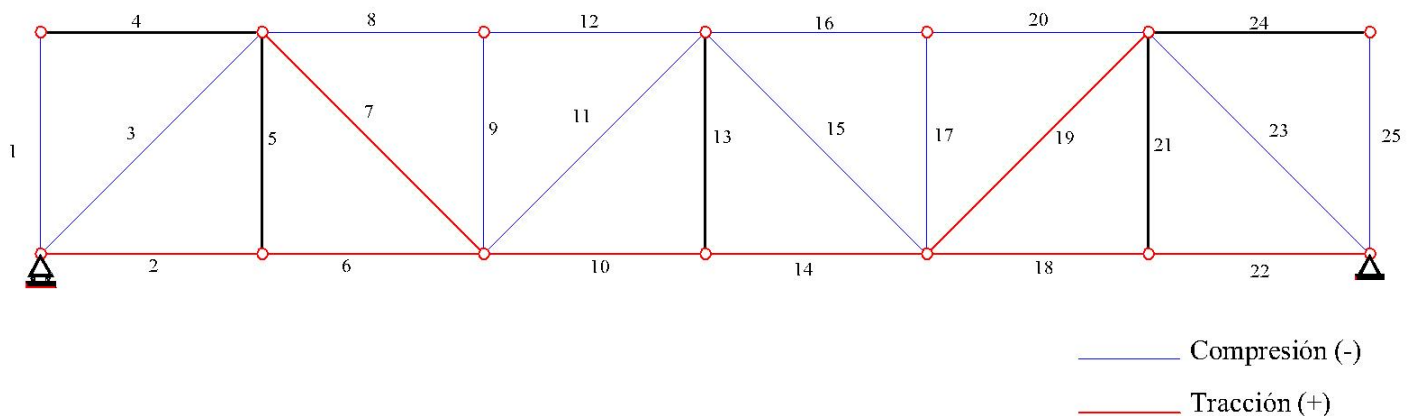
$$\boxed{N_{11} = 101 \text{ kN}} \text{ (Compresión(-))}$$

$$N_{10} \cdot a = M \rightarrow$$

$$\boxed{N_{10} = 648 \text{ kN}} \text{ (Tracción(+))}$$

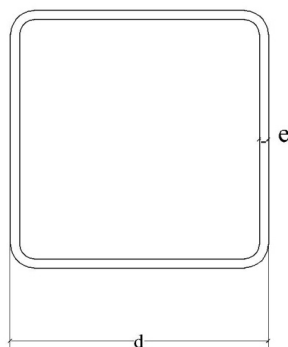
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{12} - N_{10} + N_{11} \cdot \cos 45 = 0 \rightarrow \boxed{N_{12} = 576 \text{ kN}} \text{ (Compresión(-))}$$

En la siguiente figura se coloreará con rojo las barras traccionadas y con azul las comprimidas.



Tras el cálculo de todos los esfuerzos se van a **dimensionar** varias barras, agrupándolas con criterios constructivos, y usando ACERO S275, que resiste con seguridad una tensión de  $f = 170 \text{ N/mm}^2$ . La sección de lado  $d$  supone que tiene un área de

$$S = 0,2 \cdot d^2 \text{ y un radio de giro de } i = 0,41 \cdot d.$$



Para el caso de las barras comprimidas se obtendrá el valor del

$$\text{factor de pandeo a través de la expresión: } \omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3.$$

Siendo  $L_k$  la longitud de pandeo, y en este caso de cerchas coincide con la longitud de la barra, ya que suponemos que la cercha está arriostrada en la dirección perpendicular al plano:

- **Para el grupo de las traccionadas:**

En el caso de las barras traccionadas, para dimensionarlas será necesario que

cumplan:  $f \geq \frac{N}{S}$ . Ya que no interviene el pandeo.

Axil máximo del cordón traccionado:  $N_{\max} = N_{10} = 648kN$

$$S = \frac{648000}{170} = 3811,8mm^2$$

$$S = 0,2 \cdot d^2$$

$$d = 138,05mm$$

Por ello tomaríamos  $d = 140mm$

Axil máximo del cordón traccionado	$N_{\max} = N_{10} = 648kN$
Lado <b>d</b> del perfil usando un cuadrado hueco de acero	$d = 140mm$

Axil máximo de la diagonal traccionada:  $N_{\max} = N_7 = 305kN$

$$S = \frac{305470}{170} = 1796,9mm^2$$

$$S = 0,2 \cdot d^2$$

$$d = 95mm$$

Por ello tomaríamos  $d = 100mm$

Axil máximo de la diagonal traccionada	$N_{\max} = N_7 = 305kN$
Lado <b>d</b> del perfil usando un cuadrado hueco de acero	$d = 100mm$

- **Para el grupo de las comprimidas:**

En el caso de las barras comprimidas hay que tener en cuenta el factor de pandeo, por

lo que para dimensionarlas será necesario que cumplan:  $f \geq \frac{N \cdot \omega}{S}$ .

Para obtener ese factor de pandeo se utilizará:  $\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3$ .

Axil máximo del cordón comprimido:  $N_{\max} = N_8 = N_{12} = 576kN$

Comenzaremos obteniendo un área suponiendo que estuviese a tracción:

$$S = \frac{N}{f} = \frac{576000}{170} = 3388 \text{ mm}^2 \quad \text{Lo que supone: } \begin{matrix} d = 130 \text{ mm} \\ i = 53 \text{ mm} \end{matrix}$$

Con dicha suposición de barra traccionada podemos hallar el factor de pandeo:

$$\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3 = 1 + \left( \frac{6000}{5300} \right)^3 = 2,45$$

Suponiendo que usamos dicho factor de pandeo veamos que área necesitaríamos:

$$S = \frac{N \cdot \omega}{f} = \frac{576000 \cdot 2,45}{170} = 8301 \text{ mm}^2$$

$d = 200 \text{ mm}$

Lo que supone:  $i = 83 \text{ mm}$

Ante estos dos valores, mínimo y máximo, tantearemos un valor de d entre medias de ellos para aproximarnos a la sección.

- Suponemos un  $d = 160 \text{ mm}$ , lo que supone una

$$S = 5120 \text{ mm}^2$$

$$i = 0,41 \cdot d = 65,6 \text{ mm}$$

$$\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3 = 1 + \left( \frac{6000}{6560} \right)^3 = 1,76$$

$$\frac{N \cdot \omega}{S} \leq f \rightarrow \frac{576000 \cdot 1,76}{5120} = 198 > 170 \text{ N / mm}^2$$

Al ser mayor que la tensión aceptada, probaremos con otro "d" superior.

- Suponemos un  $d = 170 \text{ mm}$ , lo que supone una

$$S = 5780 \text{ mm}^2$$

$$i = 0,41 \cdot d = 69,7 \text{ mm}$$

$$\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3 = 1 + \left( \frac{6000}{6970} \right)^3 = 1,64$$

$$\frac{N \cdot \omega}{S} \leq f \rightarrow f = 163,22 < 170 \text{ N / mm}^2 \quad \text{Nos vale, por ello tomaríamos } \boxed{d = 170 \text{ mm}}$$

Axil máximo del cordón comprimido	$N_{\max} = N_8 = N_{12} = 576 \text{ kN}$
Lado <b>d</b> del perfil usando un cuadrado	$\boxed{d = 170 \text{ mm}}$



hueco de acero	
----------------	--

Axil máximo de la diagonal comprimida:  $N_{\max} = N_3 = 509kN$

Comenzaremos obteniendo un área suponiendo que estuviese a tracción:

$$S = \frac{N}{f} = \frac{509}{170} = 2994mm^2$$

$$d = 122mm$$

Lo que supone:  $i = 50mm$

Con dicha suposición de barra traccionada podemos hallar el factor de pandeo:

$$\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3 = 1 + \left( \frac{8480}{5000} \right)^3 = 5,9$$

Suponiendo que usamos dicho factor de pandeo veamos que área necesitaríamos:

$$S = \frac{N \cdot \omega}{f} = \frac{509000 \cdot 5,9}{170} = 17600mm^2$$

$$d = 297mm$$

Lo que supone:  $i = 121,6mm$

Ante estos dos valores, mínimo y máximo, tantearemos un valor de d entre medias de ellos para aproximarnos a la sección.

- Suponemos un  $d = 190mm$ , lo que supone una

$$S = 7220mm^2$$

$$i = 0,41 \cdot d = 77,9mm$$

$$\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3 = 1 + \left( \frac{8480}{7790} \right)^3 = 2,28$$

$$\frac{N \cdot \omega}{S} \leq f \rightarrow f = 161,48 > 170N/mm^2$$

Nos vale, por ello tomaríamos  $d = 190mm$

Axil máximo de la diagonal comprimida	$N_{\max} = N_3 = 509kN$
Lado d del perfil usando un cuadrado hueco de acero	$d = 190mm$

Axil máximo del montante comprimido:  $N_{\max} = N_g = 144kN$

Comenzaremos obteniendo un área suponiendo que estuviese a tracción:

$$S = \frac{N}{f} = \frac{144000}{170} = 847mm^2$$

$$d = 65mm$$

Lo que supone:  $i = 26,7mm$

Con dicha suposición de barra traccionada podemos hallar el factor de pandeo:

$$\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3 = 1 + \left( \frac{6000}{2670} \right)^3 = 12,34$$

Suponiendo que usamos dicho factor de pandeo veamos que área necesitaríamos:

$$S = \frac{N \cdot \omega}{f} = \frac{576000 \cdot 12,34}{170} = 41837mm^2$$

$$d = 457,4mm$$

Lo que supone:  $i = 187,5mm$

Ante estos dos valores, mínimo y máximo, tantearemos un valor de d entre medias de ellos para aproximarnos a la sección.

- Suponemos un  $d = 140mm$ , lo que supone una

$$S = 3920mm^2$$

$$i = 0,41 \cdot d = 57,4mm$$

$$\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3 = 1 + \left( \frac{6000}{5740} \right)^3 = 2,14$$

$$\frac{N \cdot \omega}{S} \leq f \rightarrow f = 78,7 < 170N/mm^2$$

Nos vale, pero al tener un gran margen hasta acercarnos a la tensión máxima admisible, probaremos con una "d" menor.

- Suponemos un  $d = 100mm$ , lo que supone una

$$S = 2000mm^2$$

$$i = 0,41 \cdot d = 41mm$$

$$\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3 = 1 + \left( \frac{6000}{4100} \right)^3 = 4,13$$

$$\frac{N \cdot \omega}{S} \leq f \rightarrow f = 297,65 > 170N/mm^2 \quad 9$$

Al ser mayor que la tensión aceptada, probaremos con otro "d" superior.

- Suponemos un  $d = 120mm$ , lo que supone una

$$S = 2880mm^2$$

$$i = 0,41 \cdot d = 49,2mm$$

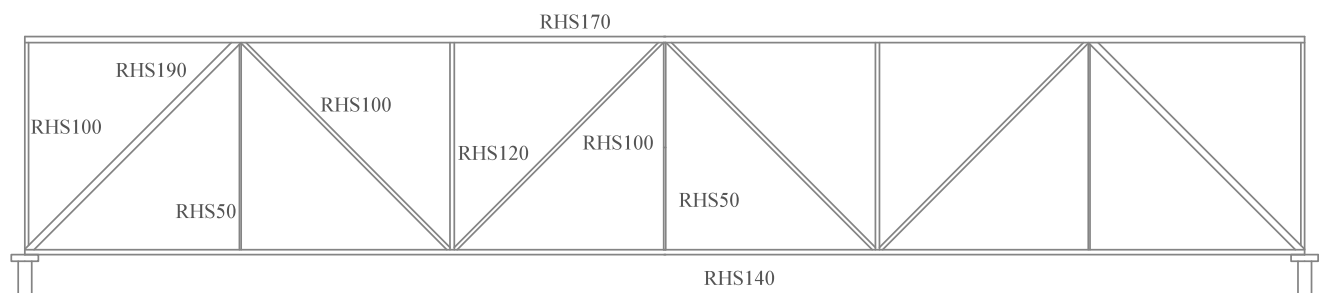
$$\omega = 1 + \left( \frac{L_k}{100 \cdot i} \right)^3 = 1 + \left( \frac{6000}{4920} \right)^3 = 2,81$$

$$\frac{N \cdot \omega}{S} \leq f \rightarrow f = 140,7 < 170 N/mm^2$$

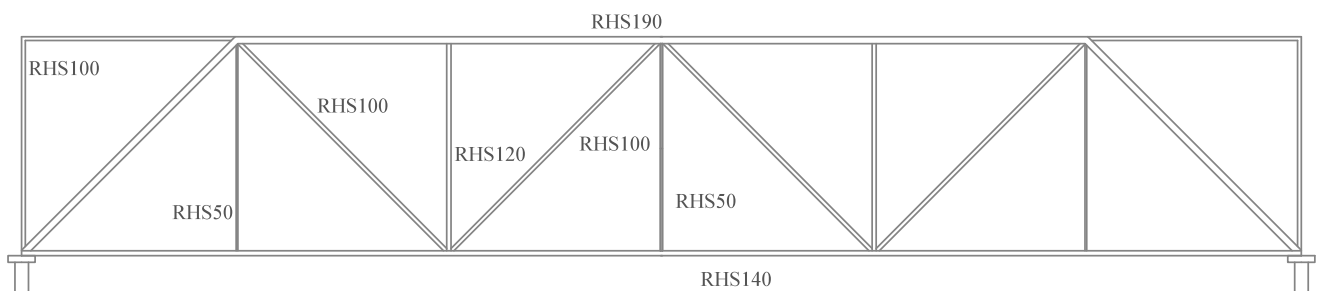
Nos vale, por ello tomaríamos  $d = 120mm$

Axil máximo del montante comprimido	$N_{\max} = N_9 = 144kN$
Lado d del perfil usando un cuadrado hueco de acero	$d = 120mm$

Tras realizar el dimensionado de las barras de esfuerzos máximos, se podría dimensionar la cercha de la siguiente forma:



Sin embargo, por diseño y facilidad de montaje se puede optar por la siguiente distribución de barras:



## PRÁCTICA 08. TRIANGULADAS: RESISTENCIA.

### ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA

Datos:  $P = 144 \text{ kN}$

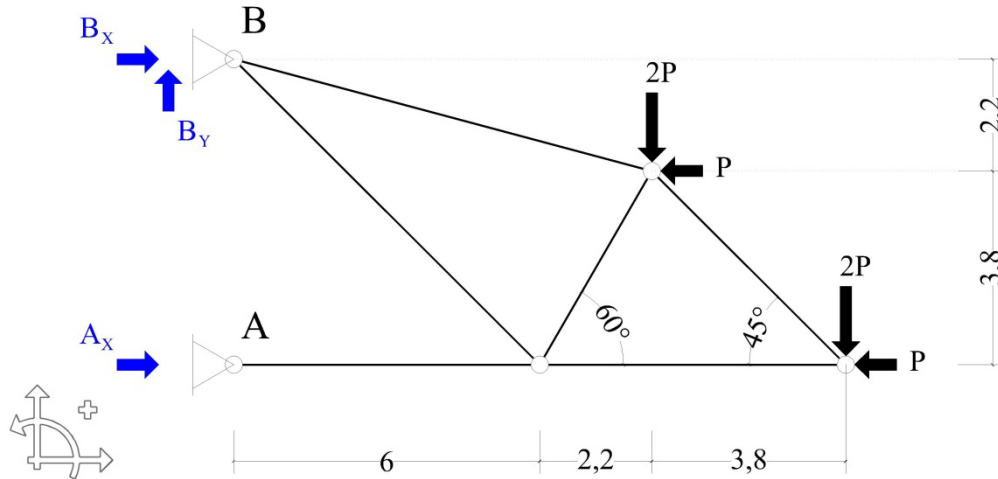


Fig. 1 Equilibrio global

Primero se va a establecer la condición de equilibrio a toda la estructura, para calcular las reacciones que se producen en los apoyos. Se toman momentos en B para hallar la reacción horizontal en A ( $A_x$ ).

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow +A_x \cdot 6 - 2P \cdot 8,2 - 2P \cdot 12 - P \cdot 2,2 - P \cdot 6 = 0$$

$$6A_x = 48,6P; \quad A_x = \frac{48,6P}{6} = \frac{48,6 \cdot 144 \text{ kN}}{6}$$

$$A_x = 1166,4 \text{ kN}$$

De igual manera, tomando momentos en A:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -B_x \cdot 6 - 2P \cdot 8,2 - 2P \cdot 12 + P \cdot 3,8 = 0$$

$$6B_x = -36,6P; \quad B_x = -\frac{36,6P}{6} = -\frac{36,6 \cdot 144 \text{ kN}}{6}$$

$$B_x = -878,4 \text{ kN}$$

Como comprobación, se plantea el equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +A_x + B_x - 2P = 0;$$

$$1166,4 \text{ kN} - 878,4 \text{ kN} - 288 \text{ kN} = 0; \quad 1166,4 - 1166,4 = 0$$

Se verifica la igualdad.

Del equilibrio de fuerzas verticales se obtiene la componente vertical de la reacción en B. Como se demostrará más adelante, A no tiene componente vertical.

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow +B_Y - 4P = 0$$

$$B_Y = 576 \text{ kN}$$

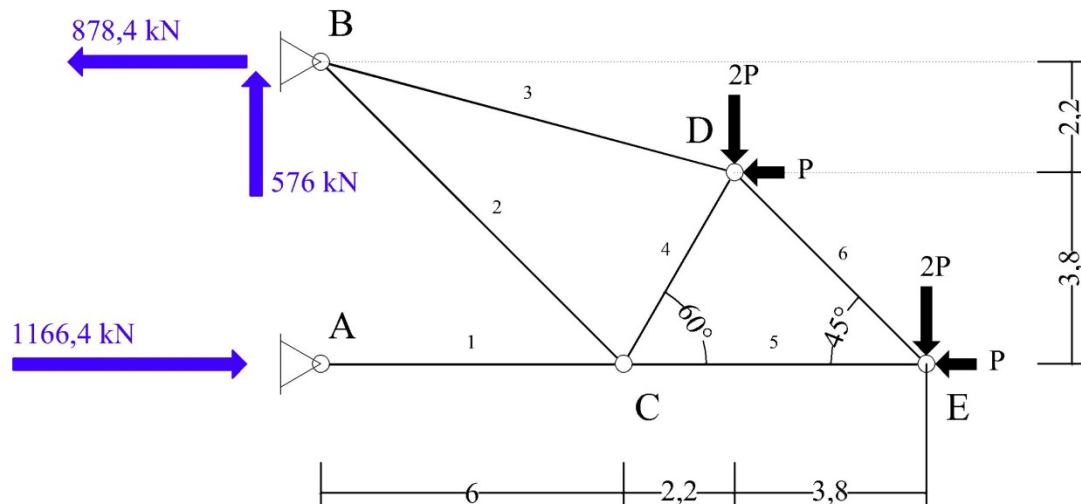


Fig. 2 Reacciones en los apoyos

Una vez calculadas las reacciones, se va a proceder a calcular los esfuerzos en las barras. El problema se puede resolver gráficamente o analíticamente, dando cortes sucesivos y estableciendo el equilibrio en cada corte.

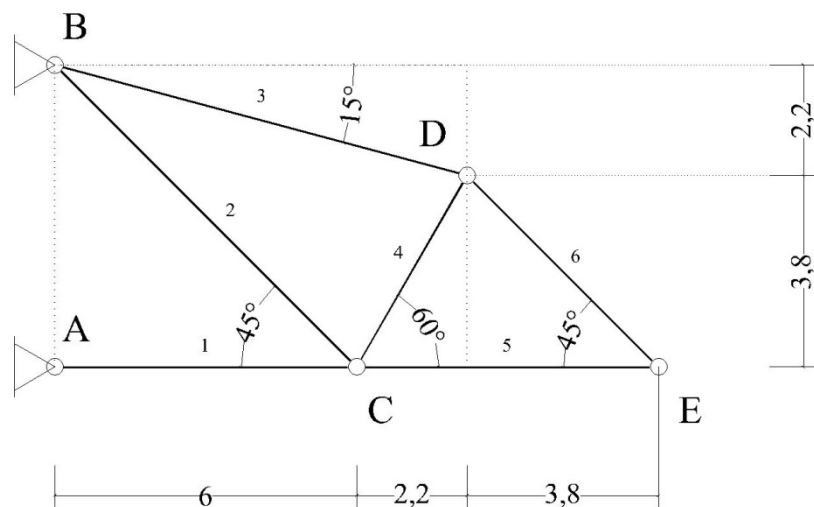


Fig. 3 Dimensiones



## NUDO A

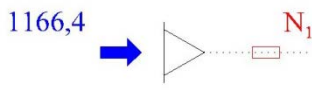


Fig. 4 Planteamiento

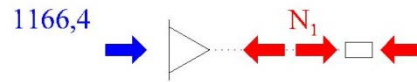


Fig. 5 Equilibrio, nudo A

Se establece el equilibrio en el nudo A, de donde se deduce que la reacción A no tiene componente vertical:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - N_1 = 0; \quad A_x = N_1$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

$$N_1 = 1166,4 \text{ kN} \quad \rightarrow \boxed{-} \leftarrow \quad \text{COMPRESIÓN - ESFUERZO AXIL BARRA 1}$$

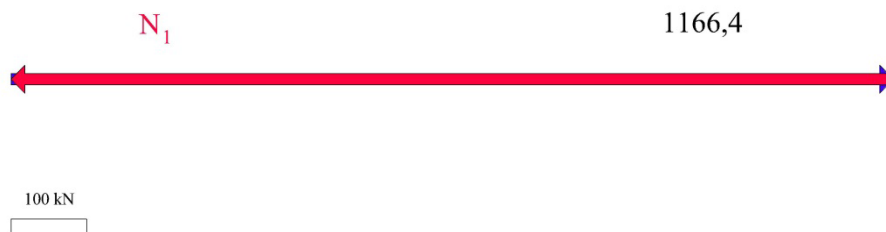


Fig. 6 Sumatorio de fuerzas

## NUDO E

Este nudo se puede resolver ya que sólo tiene dos incógnitas.

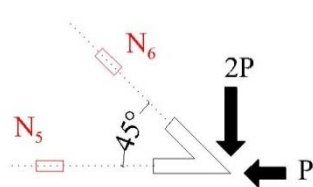


Fig. 7 Planteamiento

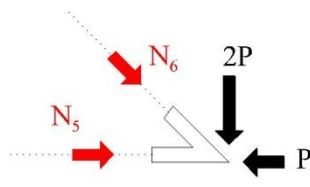


Fig. 8 Hipótesis

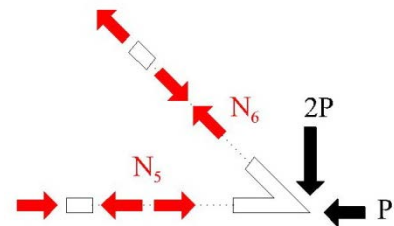


Fig. 9 Equilibrio, nudo E

Se conoce la dirección, pero no el sentido de las solicitaciones, para plantear el equilibrio supondremos un sentido para los esfuerzos de las barras 5 y 6 como el indicado en la Fig. 8. Con esa hipótesis, se plantean las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales y verticales.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_5 - P + N_6 \cdot \cos 45 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_6 \cdot \sin 45 - 2P = 0$$

Despejando  $N_6$  en la segunda ecuación, se obtiene el valor del esfuerzo de esa barra. Sustituyéndolo después en la primera ecuación, se obtiene el axil de la segunda.

$$N_6 = -\frac{2P}{\sin 45} = -\frac{2 \cdot 144 \text{ kN}}{\sin 45}$$

$$N_6 = -407,3 \text{ kN}$$

El signo negativo indica que el sentido supuesto para  $N_6$  no es el correcto.

$$N_5 = P - N_6 \cdot \cos 45 = 144 \text{ kN} - (-407,3 \text{ kN}) \cdot \cos 45$$

$$N_5 = 432 \text{ kN}$$

Una vez resuelto el sistema, se invierte el sentido de los esfuerzos incorrectos (Fig. 9) y se determina si las barras están a tracción o compresión.

$$N_5 = 432 \text{ kN} \quad \rightarrow \boxed{-} \leftarrow \text{COMPRESIÓN - ESFUERZO AXIL BARRA 5}$$

$$N_6 = 407,3 \text{ kN} \quad \leftarrow \boxed{+} \rightarrow \text{TRACCIÓN - ESFUERZO AXIL BARRA 6}$$

Gráficamente, el proceso se simplifica de forma notable. Midiendo sobre el dibujo se puede obtener el valor de la sollicitación.

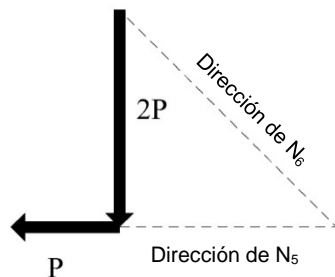


Fig. 10 Planteamiento inicial

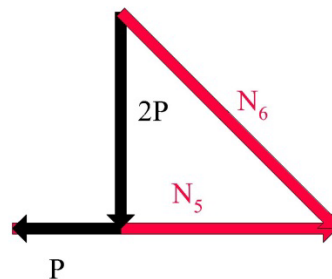


Fig. 11 Sumatorio de fuerzas

Como la dirección de los esfuerzos es conocida, basta dibujarlas para cerrar el polígono de fuerzas. De esta forma, queda también determinado el sentido de éstas.

## NUDO D

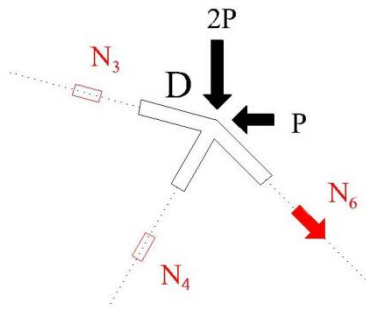


Fig. 12 Planteamiento

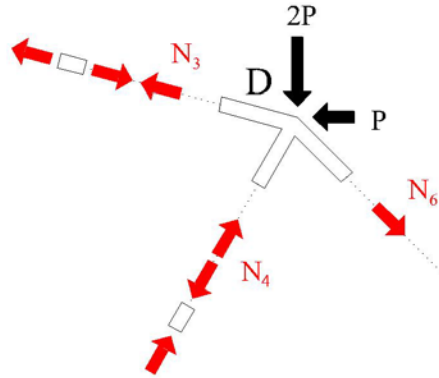


Fig. 13 Equilibrio, nudo D

Hallado el esfuerzo  $N_6$ , el nudo D pasa a tener 2 incógnitas. Se puede plantear el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales. Igual que antes, se supone un sentido a los esfuerzos desconocidos  $N_3$  y  $N_4$  (Fig. 13).

$$\sum F_x = 0 \quad (+ \rightarrow) \Rightarrow -P - N_3 \cdot \cos 15^\circ + N_4 \cdot \cos 60^\circ + N_6 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad (+ \uparrow) \Rightarrow -2P + N_3 \cdot \sin 15^\circ + N_4 \cdot \sin 60^\circ - N_6 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

Se despeja  $N_3$  de la primera ecuación y se sustituye en la segunda.

$$N_3 = \frac{-P + N_4 \cdot \cos 60^\circ + N_6 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$-2P + \left( \frac{-P + N_4 \cdot \cos 60^\circ + N_6 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 15^\circ} \right) \cdot \sin 15^\circ + N_4 \cdot \sin 60^\circ - N_6 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$-2P + (-P + N_4 \cdot \cos 60^\circ + N_6 \cdot \cos 45^\circ) \cdot \operatorname{tg} 15^\circ + N_4 \cdot \sin 60^\circ - N_6 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$N_4 \cdot \cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ + N_4 \cdot \sin 60^\circ = +2P + P \cdot \operatorname{tg} 15^\circ - N_6 \cdot \cos 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ + N_6 \cdot \sin 45^\circ$$

$$N_4 = \frac{N_6 (\sin 45^\circ - \cos 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ) + 2P + P \cdot \operatorname{tg} 15^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ + \sin 60^\circ}$$

$$N_4 = \frac{407,3 \text{ kN} \cdot (\sin 45^\circ - \cos 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ) + 2 \cdot 144 \text{ kN} + 144 \text{ kN} \cdot \operatorname{tg} 15^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ + \sin 60^\circ}$$

$$N_4 = 537,4 \text{ kN} \quad \rightarrow \boxed{-} \leftarrow \quad \text{COMPRESIÓN - ESFUERZO AXIL BARRA 4}$$

$$N_3 = 427,3 \text{ kN} \quad \leftarrow \boxed{+} \rightarrow \quad \text{TRACCIÓN - ESFUERZO AXIL BARRA 3}$$

El procedimiento gráfico hubiera resultado mucho más sencillo. De igual manera que en el nudo anterior, se trazan los vectores de las fuerzas

conocidas, y la dirección de las que no lo son (Fig. 14). Éstas últimas se intersecaran, dejando el polígono cerrado.

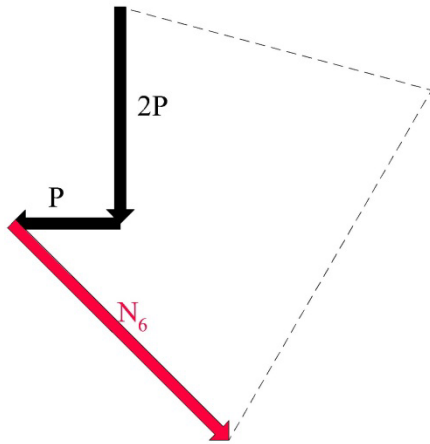


Fig. 14 Planteamiento inicial

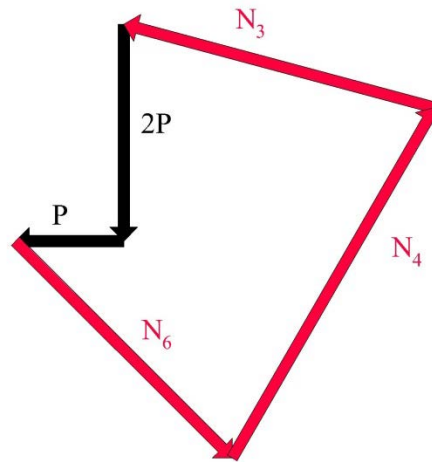


Fig. 15 Sumatorio de fuerzas

### NUDO B

Después de resolver el nudo anterior, se conoce el valor del axil  $N_3$ . El nudo sólo tiene una incógnita, y puede resolverse planteando una ecuación de equilibrio.

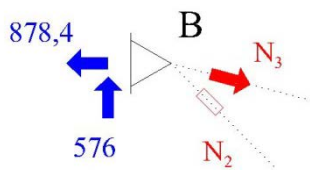


Fig. 16 Planteamiento

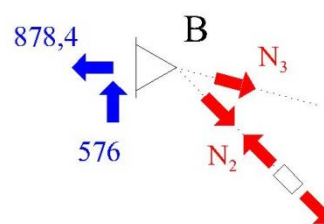


Fig. 17 Equilibrio, nudo B

$$\sum F_x = 0 \quad (+ \rightarrow) \Rightarrow -878,4 + N_3 \cdot \cos 15 + N_2 \cdot \cos 45 = 0$$

$$N_2 = \frac{878,4 - N_3 \cdot \cos 15}{\cos 45} = \frac{878,4 \text{ kN} - 427,3 \cdot \cos 15 \text{ kN}}{\cos 45}$$

$$N_2 = 658,4 \text{ kN} \quad \leftarrow \boxed{+} \rightarrow \quad \text{TRACCIÓN - ESFUERZO AXIL BARRA 2}$$

Para comprobar el resultado, se va a plantear la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales.

$$\sum F_y = 0 \quad (+ \uparrow) \Rightarrow +576 - N_3 \cdot \sin 15 - N_2 \cdot \sin 45 = 0$$

$$N_2 = \frac{576 - N_3 \cdot \sin 15}{\sin 45} = \frac{576 \text{ kN} - 427,3 \cdot \sin 15 \text{ kN}}{\sin 45} = 658,4 \text{ kN}$$

El resultado coincide con el anterior, y con el procedimiento gráfico. Se ha dibujado la reacción en el apoyo con sus proyecciones vertical y horizontal.

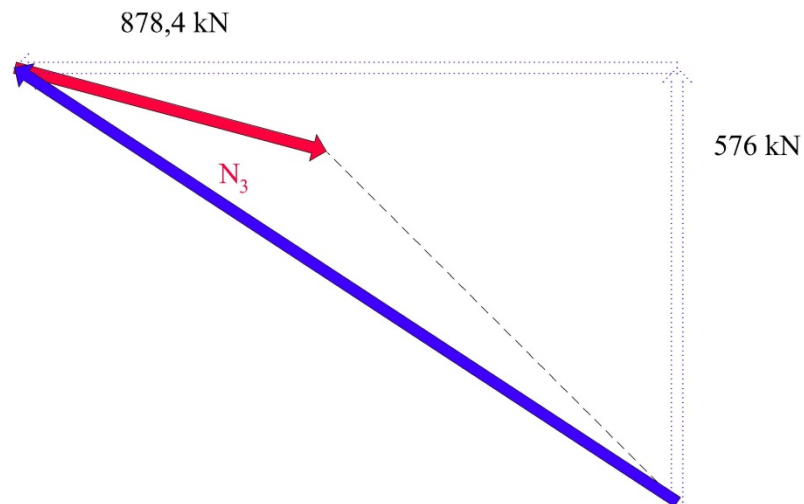


Fig. 18 Planteamiento inicial

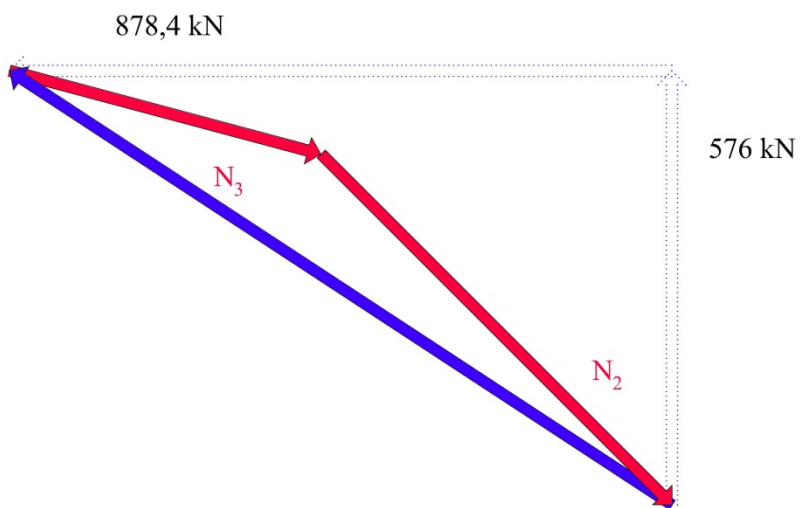


Fig. 19 Sumatorio de fuerzas

## NUDO C

Ya se han resuelto todas las barras, pero como comprobación, se plantea el equilibrio del nudo C.

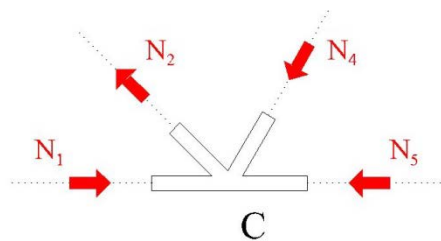


Fig. 20 Equilibrio, nudo C



$$\sum F_x = 0 \quad (+ \rightarrow) \Rightarrow N_1 - N_5 - N_4 \cdot \cos 60 - N_2 \cdot \cos 45 = 0$$

$$1166,4 \text{ kN} - 432 \text{ kN} - 537,4 \cos 60 \text{ kN} - 658,4 \cos 45 \text{ kN} = 0$$

Se verifica para las fuerzas horizontales, vamos a comprobar ahora las fuerzas verticales.

$$\sum F_y = 0 \quad (+ \uparrow) \Rightarrow N_2 \cdot \sin 45 - N_4 \cdot \sin 60 = 0$$

$$658,4 \sin 45 \text{ kN} - 537,4 \sin 60 \text{ kN} = 0$$

El nudo está en equilibrio. Representándolo gráficamente, el polígono queda cerrado.

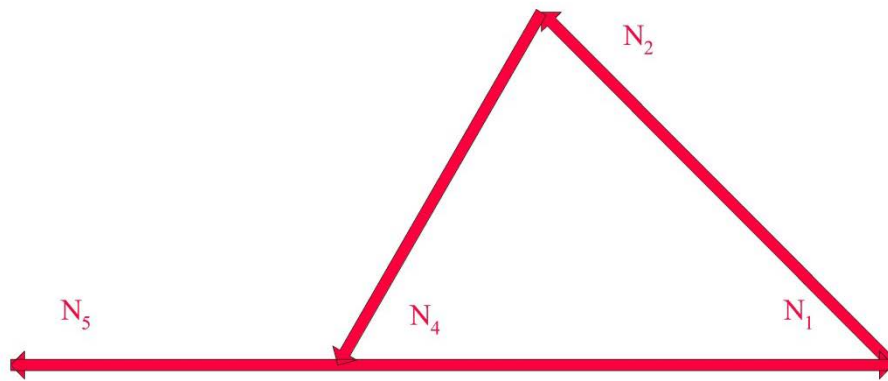


Fig. 21 Sumatorio de fuerzas, nudo C

El problema queda resuelto. Las barras traccionadas se representan de color rojo, y valor positivo. Las comprimidas de color azul y valor negativo.

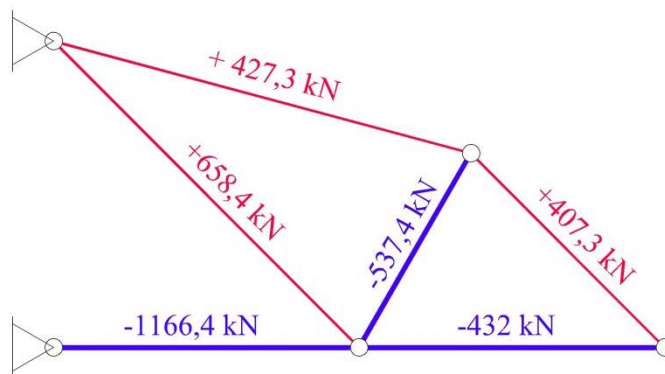


Fig. 22 Esfuerzos en las barras

## DIMENSIONADO EN MADERA

Para construir la cercha se van a utilizar secciones cuadradas de madera (c x c). Las características del material son:

Módulo de Young  $E = 10 \text{ kN/mm}^2$

Tensión normal segura  $f_{\sigma, \text{madera}} = 8 \text{ N/mm}^2$

Tensión tangencial segura  $f_{\tau, \text{madera}} = 1,2 \text{ N/mm}^2$

Área,  $A = c^2$

Radio de giro,  $i \approx 0,29 \cdot c$

### a) BARRAS TRACCIONADAS

Vamos a empezar dimensionando el cordón superior, cuyas barras trabajan todas a tracción. Para ello, se elige una sección capaz de soportar el axil máximo del mismo.

$$+N_{\text{cordon,max}} = 427,3 \text{ kN}$$

AXIL MÁXIMO DEL CORDÓN TRACCIONADO

Despejando la sección en la fórmula de la tensión se obtiene:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{c^2}; \quad c^2 = \frac{N}{\sigma}$$

$$c^2 = \frac{427,3 \cdot 10^3 \text{ N}}{8 \text{ N/mm}^2}; \quad c = \sqrt{53412,5 \text{ mm}^2} = 232 \text{ mm}$$

En madera, las secciones se fabrican en múltiplos de 10 milímetros.

$$c_{\text{cordon}} = 240 \text{ mm}$$

LADO c DE LA ESCUADRÍA DE MADERA

De las dos diagonales que tiene la cercha, solo una funciona a tracción, cuyo axil es:

$$+N_{\text{diagonal,max}} = 658,4 \text{ kN}$$

AXIL DE LA DIAGONAL TRACCIONADA

De igual manera que con el cordón superior:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{c^2}; \quad c^2 = \frac{N}{\sigma}$$

$$c^2 = \frac{658,4 \cdot 10^3 \text{ N}}{8 \text{ N/mm}^2}; \quad c = \sqrt{82300 \text{ mm}^2} = 290 \text{ mm}$$

$$c_{\text{diagonal}} = 290 \text{ mm}$$

LADO c DE LA ESCUADRÍA DE MADERA

## b) BARRAS COMPRIMIDAS

Del cordón inferior, todo ello comprimido, se elige la barra con mayor axil.

$$-N_{\text{cordon,max}} = -1166,4 \text{ kN}$$

AXIL MÁXIMO DEL CORDÓN COMPRIMIDO

Con las barras comprimidas, se sigue un procedimiento un poco distinto. La compresión tiene el problema del pandeo, que no aparece en la tracción. Está relacionado con la esbeltez de la pieza. Toda sección sometida a compresión pandeará antes de llegar a la resistencia límite que proporciona el material. Las piezas más esbeltas resistirán menos esfuerzo que las poco esbeltas porque pandearán antes.

Para tener en cuenta esta anomalía en el cálculo, se introduce un nuevo término en la ecuación de la tensión: el factor de pandeo  $\omega$ .

$$\sigma = \frac{N \cdot \omega}{A}; \quad \sigma = \frac{N \cdot \omega}{c^2}$$

Para madera, si  $\lambda \leq 100$ ,  $\omega$  se puede aproximar a,  $\omega \cong 1 + \left(\frac{\lambda}{70}\right)^3$

Siendo  $\lambda = \frac{L_p}{i}$  la esbeltez mecánica, donde  $L_p$  es la longitud de pandeo.

En este caso, se supondrá que existe un arriostramiento lateral, de tal modo que, en las barras comprimidas, la longitud de pandeo puede considerarse la longitud de la barra. Por lo tanto:

$$L_{\text{pandeo}} = 6 \text{ m}$$

LONGITUD DE PANDEO (barra 1)

Para dimensionar las barras comprimidas, se debe proceder por tanteos. Es la forma más sencilla de realizarlo, de manera que en dos o tres cálculos se puede tener un resultado con exactitud suficiente.

Por el problema del pandeo, las barras sometidas a compresión tienen siempre secciones mayores que las que sufren una tracción del mismo valor. Se deduce entonces que la sección adecuada jamás será inferior a la estrictamente necesaria para tracción.

De esta forma se puede acotar un valor mínimo para proceder al tanteo.

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{c^2}; \quad c^2 = \frac{N}{\sigma}$$

$$c^2 = \frac{1166,410^3 N}{8 N/mm^2}; \quad c = \sqrt{145800 mm^2}$$

$$c_{\min} = 382 mm$$

La sección necesaria nunca será menor que 382 mm. Para acotar el valor superior, basta calcular el coeficiente de pandeo de esta sección mínima, y calcular la sección necesaria para soportar la tensión a la que estaría sometida:

$$i = 0,29 \cdot c = 0,29 \cdot 382 mm = 111 mm$$

$$\lambda = \frac{L_p}{i} = \frac{6000 mm}{111 mm} = 54; \quad 54 < 100$$

$$\omega \cong 1 + \left( \frac{\lambda}{70} \right)^3 = 1 + \left( \frac{54}{70} \right)^3 = 1,46$$

Con este hipotético coeficiente de pandeo se procede a calcular

$$A = \frac{N \cdot \omega}{\sigma}; \quad A = \frac{1166,410^3 \cdot 1,46 N}{8 N/mm^2} \quad A = 212868 mm^2$$

$$c^2 = 212868 mm^2; \quad c = \sqrt{212868 mm^2}$$

$$c_{\max} = 461 mm$$

Con este método queda asegurado que el valor de la sección necesaria estará entre 382 y 461 mm. De esta forma se tiene una referencia para asegurar la probabilidad de éxito.

Para este primer tanteo se supondrá  $c = 440 mm$ .

$$i = 0,29 \cdot c = 128 mm$$

$$\lambda = \frac{L_p}{i} = \frac{6000 mm}{128 mm} = 47; \quad 47 < 100$$

$$\omega \cong 1 + \left( \frac{\lambda}{70} \right)^3 = 1 + \left( \frac{47}{70} \right)^3 = 1,30$$

Obtenido el coeficiente de pandeo para esta sección, se calcula la tensión a la que está sometida, que tiene que ser menor que la tensión normal segura.

$$\sigma = \frac{N \cdot \omega}{A}; \quad 8 \text{ N/mm}^2 \geq \frac{1166,410^3 \cdot 1,30 \text{ N}}{440^2 \text{ mm}^2} \quad 8 \text{ N/mm}^2 \geq 7,83 \text{ N/mm}^2$$

Esta sección podría soportar la tensión con seguridad.

$c_{\text{cordon}} = 440 \text{ mm}$
--------------------------------------

LADO c DE LA ESCUADRÍA DE MADERA

Por último, se va a dimensionar la diagonal comprimida.

$-N_{\text{diagonal,max}} = 537,4 \text{ kN}$
---

AXIL MÁXIMO DE LA DIAGONAL COMPRIMIDA

$L_{\text{pandeo}} = 4,4 \text{ m}$
-------------------------------------

LONGITUD DE PANDEO (barra 4)

Como valor mínimo.

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{c^2}; \quad c^2 = \frac{N}{\sigma}$$

$$c^2 = \frac{537,410^3 \text{ N}}{8 \text{ N/mm}^2}; \quad c = \sqrt{67175 \text{ mm}^2}$$

$$c_{\min} = 260 \text{ mm}$$

Se acota el valor superior.

$$i = 0,29 \cdot c = 75,4 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{L_p}{i} = \frac{4400 \text{ mm}}{75,4 \text{ mm}} = 58,4; \quad 58,4 < 100$$

$$\omega \cong 1 + \left( \frac{\lambda}{70} \right)^3 = 1 + \left( \frac{58,4}{70} \right)^3 = 1,58$$

$$A = \frac{N \cdot \omega}{\sigma}; \quad A = \frac{537,410^3 \cdot 1,58 \text{ N}}{8 \text{ N/mm}^2} \quad A = 106136,5 \text{ mm}^2$$

$$c^2 = 106136,5 \text{ mm}^2; \quad c = \sqrt{106136,5 \text{ mm}^2}$$

$$c_{\max} = 326 \text{ mm}$$

Acotado un intervalo de 260 a 326 mm, se tantea con  $c = 310 \text{ mm}$

$$i = 0,29 \cdot c = 89,9 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{L_p}{i} = \frac{4400 \text{ mm}}{89,9 \text{ mm}} = 44,5; \quad 44,5 < 100$$



$$\omega \cong 1 + \left( \frac{\lambda}{70} \right)^3 = 1 + \left( \frac{44,5}{70} \right)^3 = 1,26$$

$$\sigma = \frac{N \cdot \omega}{A}; \quad 8 \text{ N/mm}^2 \geq \frac{537,4 \cdot 10^3 \cdot 1,26 \text{ N}}{310^2 \text{ mm}^2} \quad 8 \text{ N/mm}^2 < 7,04 \text{ N/mm}^2$$

Este resultado ya es bastante ajustado, se puede dar por válido. No obstante, se podría seguir ajustando un poco más hasta obtener la sección mínima, y por lo tanto, la más barata.

$$c_{\text{diagonal}} = 310 \text{ mm}$$

LADO c DE LA ESCUADRÍA DE MADERA

Los fabricantes suelen vender piezas con unas dimensiones tabuladas: 30 x 30 cm, 35 x 35 cm,... de manera que calculando con esas dimensiones se puede saber que sección es la adecuada.

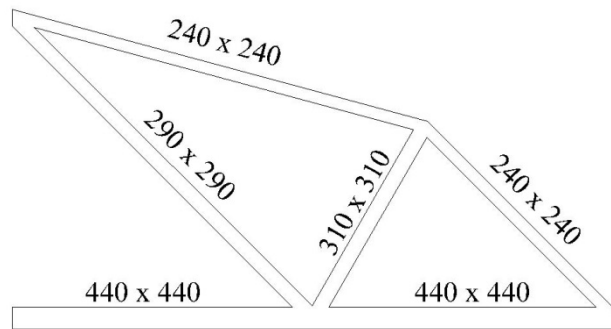


Fig. 23 Cercha dimensionada. Valores en milímetros

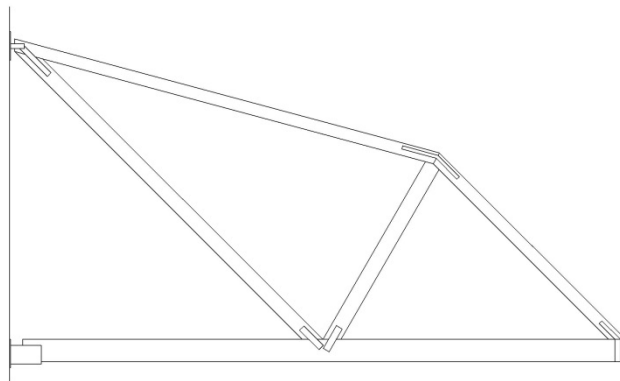
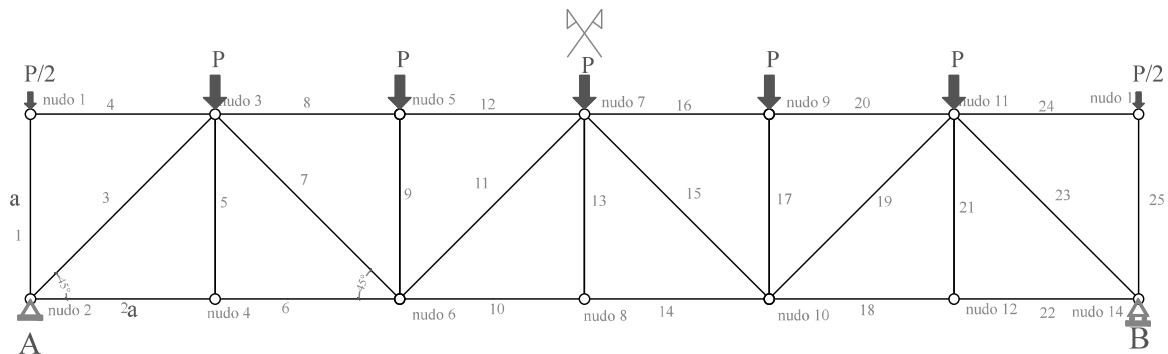


Fig. 24 Modelo construido

## PRÁCTICA 08: DEFORMACIÓN

El objetivo fundamental de esta práctica es analizar la deformación de la celosía estudiada en la práctica 07.



En este caso, obtendremos el acortamiento o alargamiento de cada una de las barras, para luego hallar el desplazamiento vertical y horizontal de la estructura, NUDOS 8 y 14 respectivamente.

Para obtener este incremento de longitud,  $\Delta L$  de cada barra, necesitamos conocer sus esfuerzos, sus longitudes iniciales y las características del material utilizado.

ACERO S275

$$E = 200 \text{ kN} / \text{mm}^2$$

Módulo de Young:

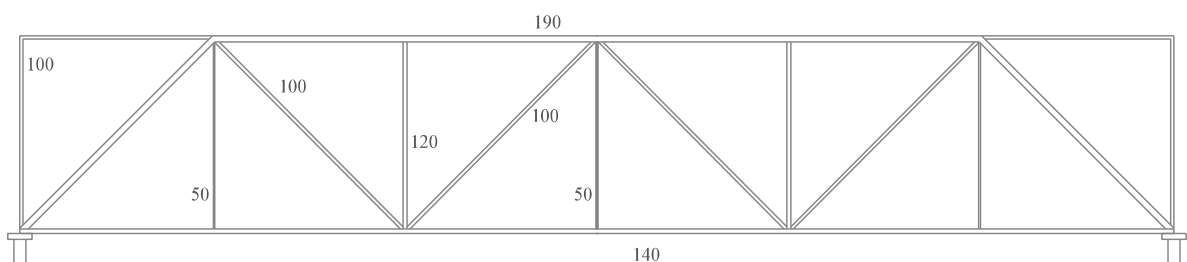
$$f = 170 \text{ N} / \text{mm}^2$$

Tensión normal segura:

Del dimensionado y diseño final de la práctica anterior obtenemos todos esos esfuerzos, longitudes iniciales y áreas de las barras. Siendo el número indicado el

$$S = 0,2 \cdot d^2$$

valor del lado “d” de la sección de acero, sabiendo que



$N_1 = 72kN \rightarrow L_1 = 6m \rightarrow S_1 = 2000mm^2$	$N_{14} = 648kN \rightarrow L_{14} = 6m \rightarrow S_{14} = 3920mm^2$
$N_2 = 360kN \rightarrow L_2 = 6m \rightarrow S_2 = 3920mm^2$	$N_{15} = 101kN \rightarrow L_{15} = 8,48m \rightarrow S_{15} = 2000mm^2$
$N_3 = 509kN \rightarrow L_3 = 8,48m \rightarrow S_3 = 7220mm^2$	$N_{16} = 576kN \rightarrow L_{16} = 6m \rightarrow S_{16} = 7220mm^2$
$N_4 = 0kN \rightarrow L_4 = 6m \rightarrow S_4 = 2000mm^2$	$N_{17} = 144kN \rightarrow L_{17} = 6m \rightarrow S_{17} = 2880mm^2$
$N_5 = 0kN \rightarrow L_5 = 6m \rightarrow S_5 = 500mm^2$	$N_{18} = 360kN \rightarrow L_{18} = 6m \rightarrow S_{18} = 3920mm^2$
$N_6 = 360kN \rightarrow L_6 = 6m \rightarrow S_6 = 3920mm^2$	$N_{19} = 305kN \rightarrow L_{19} = 8,48m \rightarrow S_{19} = 2000mm^2$
$N_7 = 305kN \rightarrow L_7 = 8,48m \rightarrow S_7 = 2000mm^2$	$N_{20} = 576kN \rightarrow L_{20} = 6m \rightarrow S_{20} = 7220mm^2$
$N_8 = 576kN \rightarrow L_8 = 6m \rightarrow S_8 = 7220mm^2$	$N_{21} = 0kN \rightarrow L_{21} = 6m \rightarrow S_{21} = 500mm^2$
$N_9 = 144kN \rightarrow L_9 = 6m \rightarrow S_9 = 2880mm^2$	$N_{22} = 360kN \rightarrow L_{22} = 6m \rightarrow S_{22} = 3920mm^2$
$N_{10} = 648kN \rightarrow L_{10} = 6m \rightarrow S_{10} = 3920mm^2$	$N_{23} = 509kN \rightarrow L_{23} = 8,48m \rightarrow S_{23} = 7220mm^2$
$N_{11} = 101kN \rightarrow L_{11} = 8,48m \rightarrow S_{11} = 2000mm^2$	$N_{24} = 0kN \rightarrow L_{24} = 6m \rightarrow S_{24} = 2000mm^2$
$N_{12} = 576kN \rightarrow L_{12} = 6m \rightarrow S_{12} = 7220mm^2$	$N_{25} = 72kN \rightarrow L_{25} = 6m \rightarrow S_{25} = 2000mm^2$
$N_{13} = 0kN \rightarrow L_{13} = 6m \rightarrow S_{13} = 500mm^2$	

Una vez conocidos estos datos, y sabiendo que la tensión a la que están sometidas cada una de las barras es igual a su esfuerzo entre su superficie:

$$\sigma_i = N_i / S_i$$

$$\varepsilon_i = \sigma_i / E$$

$$\varepsilon_i = \Delta L_i / L_i$$

Y que su deformación es:

$$\Delta L_i = \frac{N_i \cdot L_i}{S_i \cdot E}$$

Podemos despejar que:

$\Delta L_1 = 1,08mm$	$\Delta L_{14} = 4,96mm$
-----------------------	--------------------------

$\Delta L_2 = 2,75mm$	$\Delta L_{15} = 2,14mm$
$\Delta L_3 = 2,98mm$	$\Delta L_{16} = 2,39mm$
$\Delta L_4 = 0mm$	$\Delta L_{17} = 1,5mm$
$\Delta L_5 = 0mm$	$\Delta L_{18} = 2,75mm$
$\Delta L_6 = 2,75mm$	$\Delta L_{19} = 6,47mm$
$\Delta L_7 = 6,46mm$	$\Delta L_{20} = 2,39mm$
$\Delta L_8 = 2,39mm$	$\Delta L_{21} = 0mm$
$\Delta L_9 = 1,5mm$	$\Delta L_{22} = 2,75mm$
$\Delta L_{10} = 4,96mm$	$\Delta L_{23} = 2,99mm$
$\Delta L_{11} = 2,14mm$	$\Delta L_{24} = 0mm$
$\Delta L_{12} = 2,39mm$	$\Delta L_{25} = 1,08mm$
$\Delta L_{13} = 0mm$	

### MOVIMIENTO VERTICAL ( $\partial_v$ )

Una vez recopilado los datos anteriores y calculado la deformación de cada barra por separado, pasaremos a calcular el desplazamiento vertical del NUDO 3. Lo haremos a través de los trabajos virtuales, igualando el trabajo de las fuerzas exteriores y el de las fuerzas interiores:

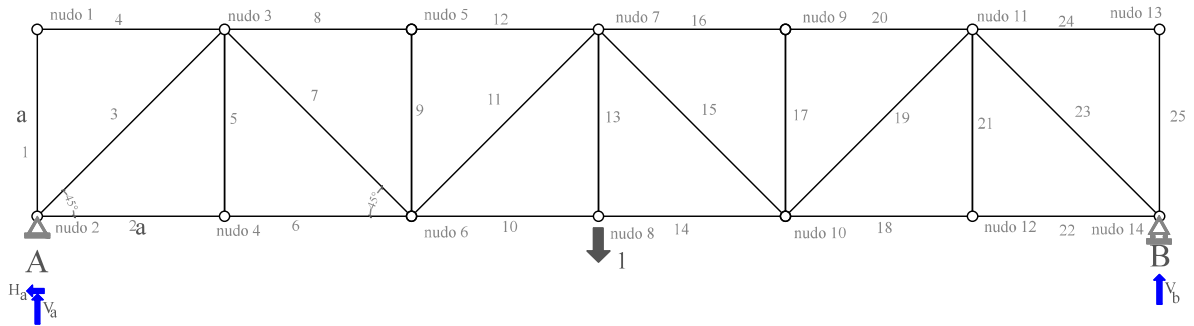
$$W_{int} = \sum \Delta L_i \cdot N_i^*$$

$$W_{ext} = 1 \cdot \partial_v$$

$$N_i^*$$

Siendo  $N_i^*$  el esfuerzo de las barras un nuevo sistema de fuerzas virtuales, de una única carga de valor unidad en la dirección y en el nudo en el que estudiemos el desplazamiento.

Estudiemos dicho sistema de fuerzas virtuales:



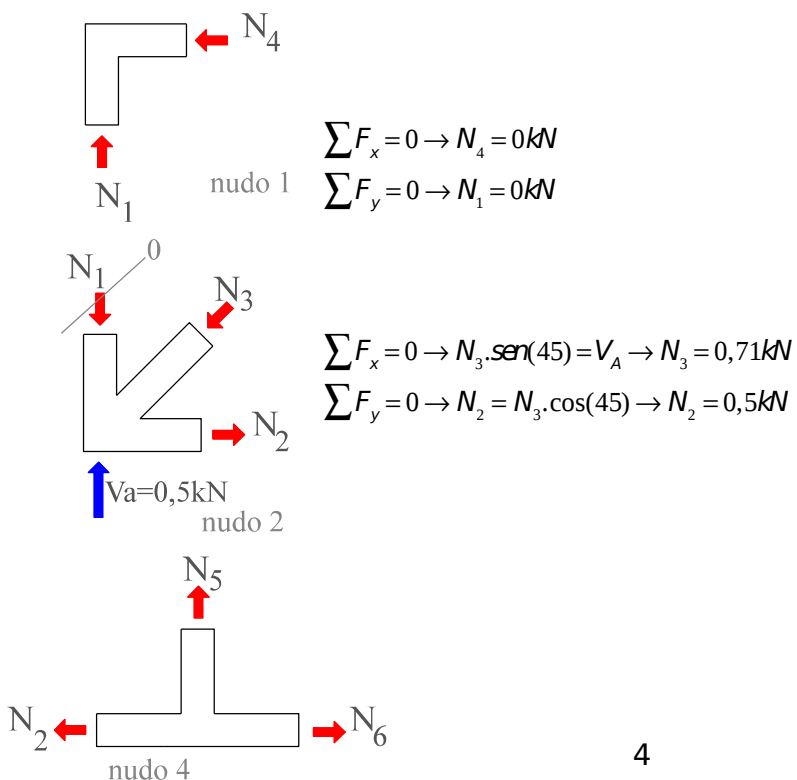
$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A = 0,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_B = 0,5 \text{ kN}$$

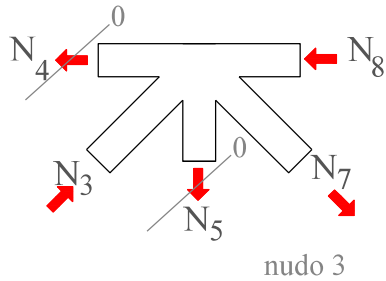
A través del estudio del equilibrio de nudos sencillo que nos aparece en esta configuración, podemos obtener el esfuerzo de cada una de las barras, reduciendo el número de nudos a estudiar a la mitad debido a la simetría de la estructura.

Colocaremos los esfuerzos de los nudos intuyendo si serán de compresión o de tracción, sabiendo que si el resultado es negativo, es sentido del esfuerzo es el contrario al considerando.



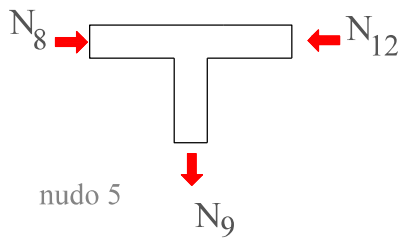
$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_5 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_2 = N_6 \rightarrow N_6 = 0,5 \text{ kN}$$



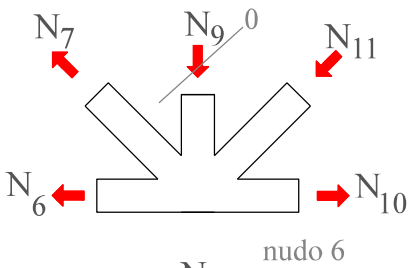
$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_3 \cdot \cos(45) = N_7 \cdot \cos(45) \rightarrow N_7 = 0,71 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_3 \cdot \sin(45) + N_7 \cdot \sin(45) = N_8 \rightarrow N_8 = 1 \text{ kN}$$



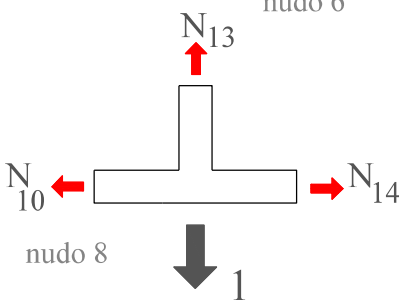
$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_9 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_8 = N_{12} = 1 \text{ kN}$$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_7 = N_{11} = 0,71 \text{ kN}$$

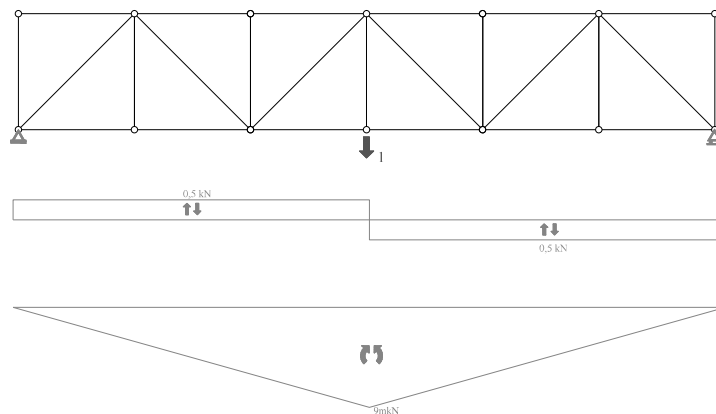
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_7 \cdot \cos(45) + N_{11} \cdot \cos(45) + N_6 = N_{10} \rightarrow N_{10} = 1,5 \text{ kN}$$

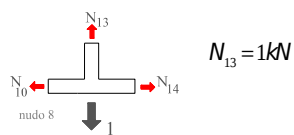
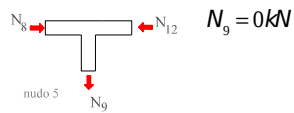
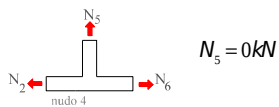
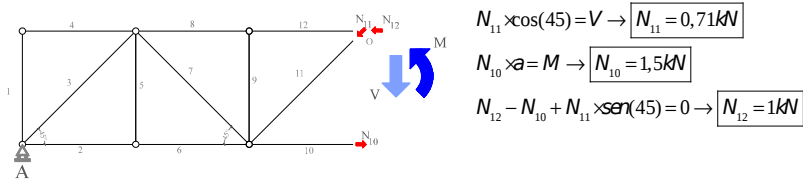
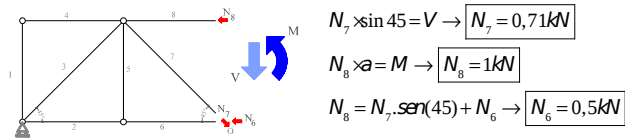
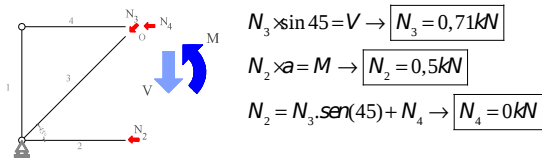


$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{13} = 1 \text{ kN}$$

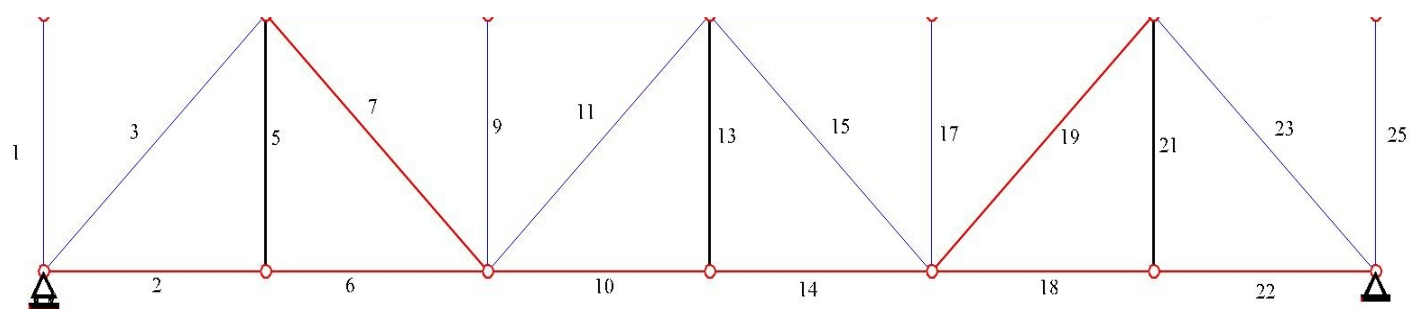
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{10} = N_{14} = 0,5 \text{ kN}$$

Estos esfuerzos también se podrían obtener mediante los diagramas de esfuerzos cortantes y flectores a través del método de los cortes:

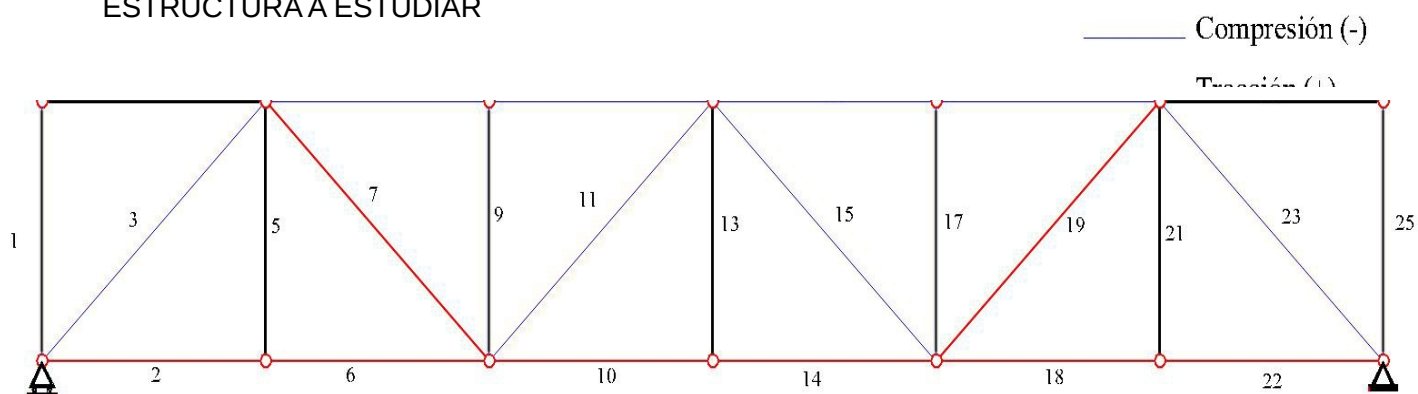




En la siguiente figura se coloreará con rojo las barras traccionadas, con azul las comprimidas y en negro las que no trabajan.



ESTRUCTURA A ESTUDIAR



ESTRUCTURA DE FUERZAS VIRTUALES

Observamos que hay un gran número de barras que no intervienen en la configuración de carga unitaria, por tanto, no tienen relevancia para el movimiento vertical del nudo 8.



Recopilando todos los datos obtenidos podemos realizar una tabla que nos facilitará los próximos cálculos y nos clarificará la comprensión de los resultados.

BARRA	$N^*(kN)$	$N(kN)$	$L(mm)$	$E.S$ ( $kN$ )	$\Delta L(mm)$	$N^*.\Delta L$	CORDÓN	MONTANTE	DIAGONAL
1	0	72	600 0	400000	1,08	0		0	
2	0,5	360	600 0	784000	2,75	1,38	1,38		
3	0,71	509	848 0	1444000	2,99	2,12			2,12
4	0	0	600 0	400000	0	0	0		
5	0	0	600 0	100000	0	0		0	
6	0,5	360	600 0	784000	2,75	1,38	1,38		
7	0,71	305	848 0	400000	6,45	4,59			4,59
8	1	576	600 0	1444000	2,39	2,39	2,39		
9	0	144	600 0	576000	1,5	0		0	
10	1,5	648	600 0	784000	4,96	7,44	7,44		
11	0,71	101	848 0	400000	2,14	1,52			1,52
12	1	576	600 0	1444000	2,39	2,39	2,39		
13	1	0	600 0	100000	0	0		0	
14	0,5	648	600 0	784000	4,96	2,48	2,48		
15	0,71	101	848 0	400000	2,14	1,52			1,52
16	1	576	600 0	1444000	2,39	2,39	2,39		
17	0	144	600 0	576000	1,5	0		0	
18	0,5	360	600 0	784000	2,75	1,38	1,38		
19	0,71	305	848 0	400000	6,47	4,59			4,59
20	1	576	600 0	1444000	2,39	2,39	2,39		
21	0	0	600 0	100000	0	0		0	
22	0,5	360	600	784000	2,75	1,38	1,38		

			0						
23	0,71	509	848 0	1444000	2,99	2,99			2,99
24	0	0	600 0	400000	0	0	0		
25	0	72	600 0	400000	1,08	0		0	

$\sum N^* \cdot \Delta L =$ = 41,33	$\sum = 25$	$\sum = 0$	$\sum = 17,33$
--	-------------	------------	----------------

$$N^*.\Delta L$$

La multiplicación de  $N^*.\Delta L$  corresponde a la contribución de cada una de las barras al movimiento vertical del nudo 8. Interpretando los resultados, observamos que la contribución a dicho movimiento viene determinada sobre todo por los cordones, siendo nula la intervención de los montantes.

$$\partial_v = \sum \Delta L.N^*$$

Por lo que el

$$\partial_v = 41,33mm$$

## MOVIMIENTO HORIZONTAL ( $\partial_h$ )

Una vez recopilado los datos anteriores y calculado la deformación de cada barra por separado, pasaremos a calcular el desplazamiento vertical del NUDO B. Lo haremos a través de los trabajos virtuales, igualando el trabajo de las fuerzas exteriores y el de las fuerzas interiores:

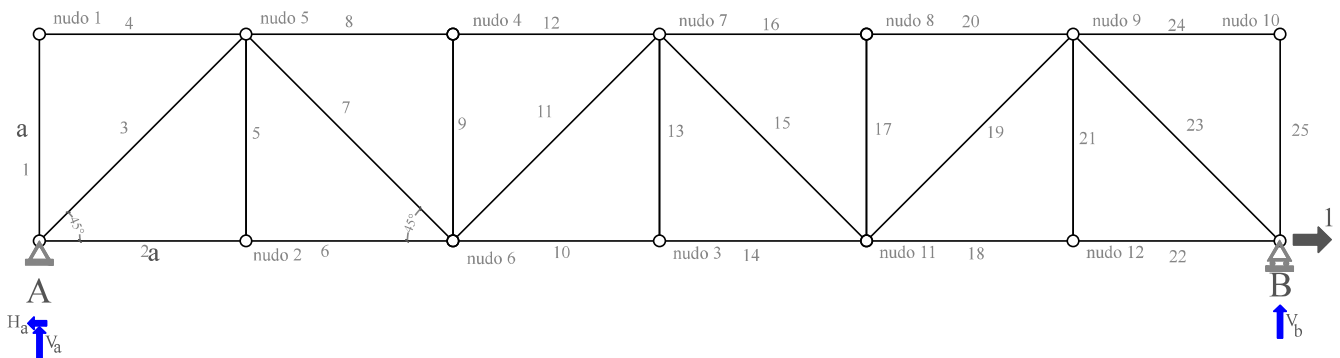
$$W_{int} = \sum \Delta L_i \cdot N_i^*$$

$$W_{ext} = 1 \cdot \partial_h$$

$N^*$

Siendo  $N^*$  el esfuerzo de las barras un nuevo sistema de fuerzas virtuales, de una única carga de valor unidad en la dirección y en el nudo en el que estudiemos el desplazamiento.

Estudiemos dicho sistema de fuerzas virtuales:

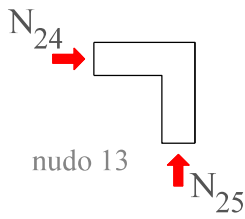


$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 1kN$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A = 0kN$$

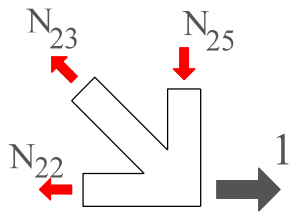
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_B = 0kN$$

A través del estudio del equilibrio de nudos sencillo que nos aparece en esta configuración, podemos obtener el esfuerzo de cada una de las barras, reduciendo el número de nudos a estudiar a la mitad debido a la simetría de la estructura:



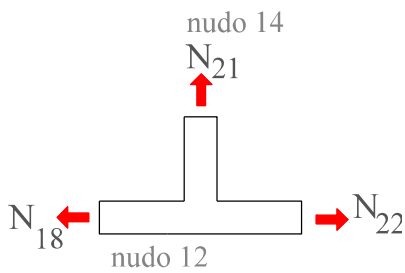
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{24} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{25} = 0 \text{ kN}$$



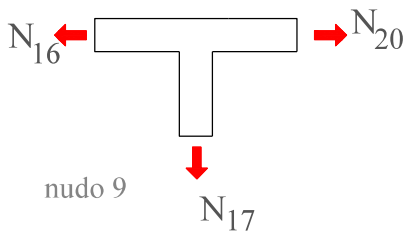
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{23} \cdot \text{sen}(45) = 0 \rightarrow N_{23} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{22} = 1$$



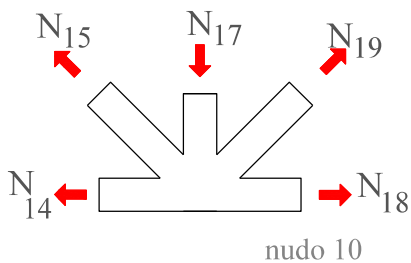
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{18} = N_{22} \rightarrow N_{18} = 1 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{21} = 0 \text{ kN}$$



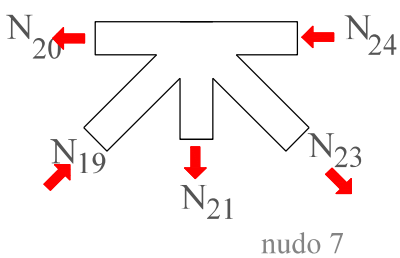
$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{19} \cdot \text{sen}(45) = 0 \rightarrow N_{19} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{20} = 0 \text{ kN}$$



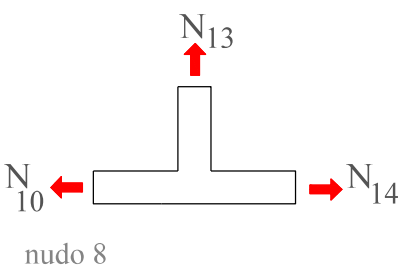
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{16} = N_{20} \rightarrow N_{16} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{17} = 0 \text{ kN}$$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{15} \cdot \text{sen}(45) = 0 \rightarrow N_{15} = 0 \text{ kN}$$

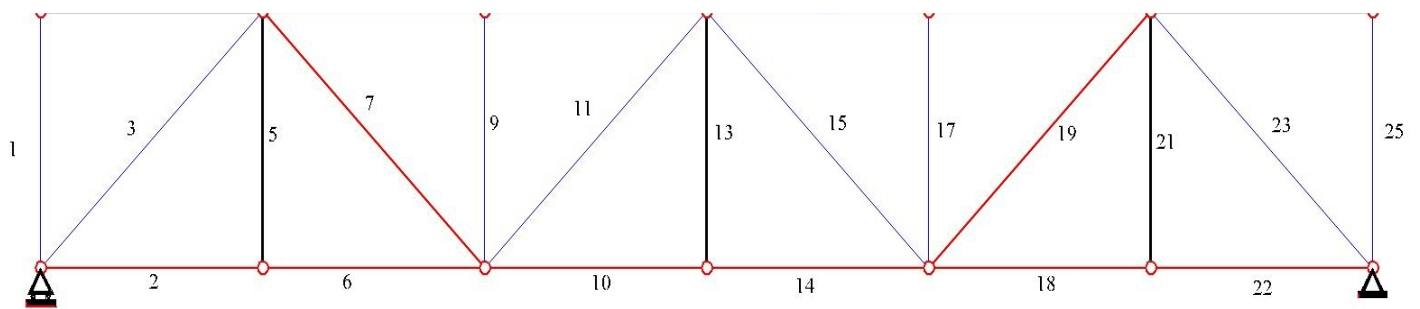
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{14} = N_{18} \rightarrow N_{14} = 1 \text{ kN}$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{10} = N_{14} \rightarrow N_{10} = 1 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{13} = 0 \text{ kN}$$

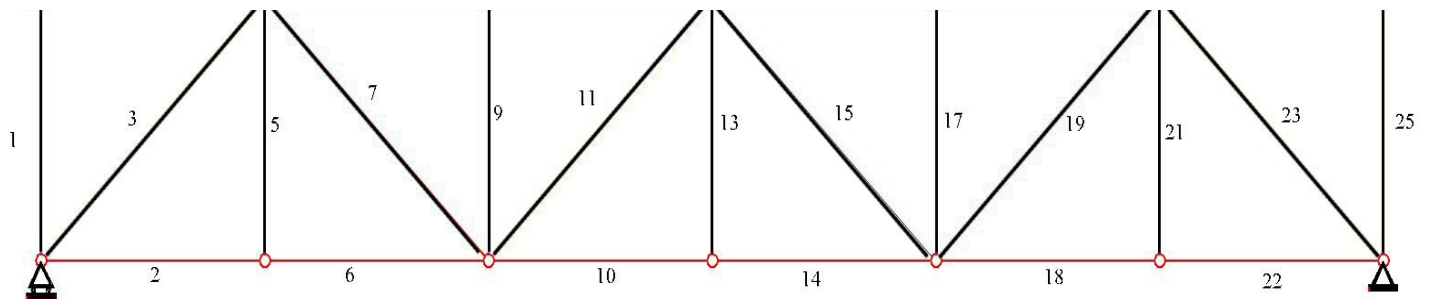
En la siguiente figura se coloreará con rojo las barras traccionadas, con azul las comprimidas y en negro las que no trabajan.



ESTRUCTURA A ESTUDIAR

— Compresión (-)

— Tracción (+)



ESTRUCTURA DE FUERZAS VIRTUALES

— Compresión (-)

En este caso observamos que en el sistema de fuerzas virtuales sólo intervienen las barras del cordón inferior.

Recopilando todos los datos obtenidos podemos realizar una tabla que nos facilitará los próximos cálculos y nos clarificará la compresión de los resultados.

BARRA	N*(kN)	N(kN)	L(mm)	E.S (kN)	$\Delta L$ (mm)	N*. $\Delta L$	CORDÓN	MONTANTE	DIAGONAL
1	0	72	600 0	400000	1,08	0		0	
2	1	360	600 0	784000	2,75	2,75	2,75		
3	0	509	848 0	1444000	2,99	0			0
4	0	0	600 0	400000	0	0	0		
5	0	0	600 0	100000	0	0		0	
6	1	360	600 0	784000	2,75	2,75	2,75		
7	0	305	848 0	400000	6,45	0			0
8	0	576	600 0	1444000	2,39	0	0		
9	0	144	600 0	576000	1,5	0		0	
10	1	648	600 0	784000	4,96	4,96	4,96		
11	0	101	848 0	400000	2,14	0			0
12	0	576	600 0	1444000	2,39	0	0		
13	0	0	600 0	100000	0	0		0	
14	1	648	600 0	784000	4,96	4,96	4,96		
15	0	101	848 0	400000	2,14	0			0
16	0	576	600 0	1444000	2,39	0	0		
17	0	144	600 0	576000	1,5	0		0	
18	1	360	600 0	784000	2,75	2,75	2,75		
19	0	305	848 0	400000	6,47	0			0
20	0	576	600 0	1444000	2,39	0	0		
21	0	0	600 0	100000	0	0		0	
22	1	360	600 0	784000	2,75	2,75	2,75		
23	0	509	848 0	1444000	2,99	0			0

24	0	0	600 0	400000	0	0	0		
25	0	72	600 0	400000	1,08	0		0	

$\sum N^* \cdot \Delta L =$ = 20,92	$\sum = 20,92$	$\sum = 0$	$\sum = 0$
--	----------------	------------	------------

$$N^* \cdot \Delta L$$

La multiplicación de  $N^* \cdot \Delta L$  corresponde a la contribución de cada una de las barras al movimiento vertical de la celosía. Interpretando los resultados, observamos que la contribución a dicho movimiento viene determinada por los cordones inferiores. Siendo nula la contribución del resto de barras.

$$\partial_h = \sum \Delta L \cdot N^*$$

Por lo que el

$$\partial_h = 20,92mm$$